Észrevehető, hogy az $a_1 = t + \frac{1}{t}$ egyenlet gyökei:

$$\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - 1},$$

és ezek valósak, hiszen a feltétel szerint $a_1 \geq 2$. Legyen

$$z = \frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - 1}.$$

Ekkor egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$a_2 = a_1^2 - 1 = z^2 + \frac{1}{z^2}, \quad a_3 = a_2^2 - 1 = z^4 + \frac{1}{z^4}, \ldots$$

és általában

$$a_n = z^{2^{n-1}} + \frac{1}{z^{2^{n-1}}}.$$

(Megjegyezzük, hogy $a_1 \geq 2$ miatt $z \geq 1$.) Legyen

$$S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

nevezetesen

$$S_1 = \frac{z}{z^2+1}, \quad S_2 = \frac{z^7 - z}{z^8 - 1}.$$

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy $n > 1$-re

$$S_n = \frac{z^{2^{n+1}-1} - z}{z^{2^{n+1}} - 1}.$$

Láttuk már, hogy ez $n = 1$, 2-re igaz, így még a $k$-ról $(k+1)$-re való öröklődést kell belátni.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}} = \frac{z^{2^{k+1}-1} - z}{z^{2^{k+1}} - 1} + \frac{1}{\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) \ldots \left(z^{2^k} + \frac{1}{z^{2^k}}\right)}.$$

A második törtet $\left(z - \frac{1}{z}\right)$-vel bővítve kapjuk, hogy

$$S_{k+1} = \frac{z^{2^{k+1}-1} - z}{z^{2^{k+1}-1}} + \frac{z - \frac{1}{z}}{z^{2^{k+1}} - \frac{1}{z^{2^{k+1}}}} = \frac{z^{2^{k+2}-1} - z}{z^{2^{k+2}} - 1}.$$

Ezek után a keresett összeg a következő határértékkel egyenlő:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^{2^{n+2}-1} - z}{z^{2^{n+2}} - 1},$$

ami a következőképpen alakítható:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^{2^{n+2}-1} - z}{z^{2^{n+2}} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{z^{2^{n+2}-2}}}{z - \frac{1}{z^{2^{n+2}-1}}}.$$

Mivel $z \geq 1$, ez a határérték $\frac{1}{z}$-vel egyenlő. Így azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - 1}} = \frac{a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - 1},$$

amint azt bizonyítani kellett.