Jelöljük N-nel azoknak az n természetes számoknak a halmazát, amelyekre

$$f(n) \geq n, \tag{2}$$

és M-mel azokét, amelyekre

$$f(m) < m. \tag{3}$$

Megmutatjuk, hogy M üres, vagyis (2) minden n-re teljesül. Ellenkező esetben legyen ugyanis az $\{f(m),\ m \in M\}$ függvényértékek minimuma $k = f(m)$. Mivel (3) szerint

$$j = m - 1 \geq f(m), \tag{4}$$

ez is természetes szám, és erre (1)-et alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f(m) > f\big(f(j)\big).$$

Az $f(j)$ helyen tehát az f értéke kisebb $k = f(m)$-nél, így $f(j)$ csak N-beli lehet, azaz $f\big(f(j)\big) \geq f(j)$. Így $f(j)$ is kisebb k-nál, és j is N-beli. Ebből viszont (2) és (4) alapján

$$f(j) \geq j \geq k$$

következne, ami összeegyeztethetetlen az előbb kapott $f(j) < k$ következménnyel. Ezzel beláttuk, hogy (2) minden n természetes számra teljesül.

Alkalmazva (2)-t az $f(n)$ számra kapjuk, hogy $f\big(f(n)\big) \geq f(n)$, ezt (1)-gyel összevetve

$$f(n+1) \geq f(n)$$

adódik, tehát a függvény szigorúan monoton növekvő. Ha volna olyan n, amelyre (2)-ben egyenlőtlenség állna, arra csak $n < n+1 < f(n)$ lehetne, hiszen $f(n) = n+1$ mellett (1) nem lehetne igaz. Ekkor viszont (1) az f szigorúan növekvő volta miatt nem teljesülhetne, tehát (2)-ben minden n természetes számra az egyenlőség érvényes.