A bizonyításhoz felhasználjuk Lagrange tételét (Ld. pl. Molnár Emil: Matematikai versenyek 523. old.):

Ha az $f(x)$ függvény az $[a,\ b]$ zárt intervallumban folytonos, az $(a,\ b)$ nyílt intervallumban differenciálható, akkor van legalább egy olyan c hely, melyre

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ (a<c<b).$$

Legyen most $k=a+\frac{b-a}{6}=\frac{5a+b}{6}$. Nyilván $\frac{6a}{6}=a<\frac{5a+b}{6}<\frac{6b}{6}=b$, hiszen $a<b$. Írjuk fel Lagrange tételét az $[a,\ k]$ és a $[k,\ b]$ zárt intervallumokra; ezt megtehetjük, mivel a tétel feltételei teljesülnek.

Ekkor alkalmas c_1-re és c_2-re:

$$a<c_1<k,\qquad f'(c_1)=\frac{f(k)-f(a)}{k-a}$$

és

$$k<c_2<b,\qquad f'(c_2)=\frac{f(b)-f(k)}{b-k}.$$

Itt $c_1\neq c_2$, mert $c_1<k<c_2$, továbbá c_1 is és c_2 is az $(a,\ b)$ nyílt intervallumban fekszenek, így a két különböző c_1 és c_2 helyre: $a<c_1<k<c_2<b$. Továbbá k megválasztása miatt

$$f'(c_1)+5f'(c_2)=\frac{f(k)-f(a)}{k-a}+5\frac{f(b)-f(k)}{b-k}=\frac{6\,(f(b)-f(a))}{b-a}=0,$$

mivel $f(a)=f(b)$.

Így $x=c_1$ és $y=c_2$ $(c_1\neq c_2)$ választások megfelelőek. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. Hasonló feltételek mellett – megfelelő k érték megválasztásával – az

$$\alpha f'(x)+\beta f'(y)=0$$

egyenletre is találhatunk megoldást ($\alpha\geqq 0,\ \ \beta\geqq 0$ valós számok $a<x<y<b$).

Erdélyi Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)