Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{p\,!q\,!}{(p+q+1)\,!}, \tag{1}$$

ahol p, q természetes számok!

Megoldás. Legyenek f és g deriválható függvények, és tegyük fel, hogy f' és g' is folytonos. Ekkor

$$\int_a^b f'g\,dx = \big[fg\big]_a^b - \int_a^b fg'dx.$$

Ez az ún. parciális integrálás szabálya (lásd pl. Bárczy Barnabás: Integrálszámítás, Műszaki Könyvkiadó, 1973). Ezt alkalmazva az $f'(x)=x^p,\ g(x)=(1-x)^q$ függvényekre:

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(1-x)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx =$$

$$= \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Ezt ismételten alkalmazva kapjuk, hogy a keresett integrál értéke

$$\frac{q}{p+1}\cdot\frac{q-1}{p+2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{p+q}\int_0^1 x^{p+q}dx = \frac{q\,!p\,!}{(p+q)\,!}\cdot\frac{1}{p+q+1},$$

ami éppen (1) jobb oldalával egyezik meg.

Wolfgang Moldenhauer (Eisenach, NDK)