Oldjuk meg a feladatot először $n=1$ esetén. Ekkor az egyenlőtlenség az

$$ac+bc-ab \leq mc$$

alakot ölti, ahol $m = \max(a,\ b,\ c)$. Ha $c \leq b$, akkor $ac \leq ab$ és $bc \leq mc$, és ezek összeadásából adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség. Ha $c > b$, akkor ennek és a $c-a \leq m-a$ egyenlőtlenségnek a szorzásával kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

Térjünk rá most az általános esetre. Legyen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = A, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = B, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i = C.$$

Rögzítve a b_i és a c_i változókat ($i=1,\ 2,\ \dots,\ n$), az egyenlőtlenség bal oldala az $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ változók lineáris függvénye. Lineáris függvény a maximumát egy tartományban csak olyan pontban veheti fel, amely nem belső pontja egyetlen, a tartományban haladó egyenes szakasznak sem. A tartomány jelen esetben a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = A, \quad a_i \geq 0 \ \ (i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

feltételekkel van definiálva, azaz az n-dimenziós szimplex egy lapja. Az előbbi feltételnek csak a szimplex csúcsai (az origót kivéve) tesznek eleget, azaz a kifejezés a legnagyobb értékét valamely $(0, 0, \dots, 0, A, 0, \dots, 0)$ pontban veszi fel, és ekkor az értéke, pontosabban legyen $a_j = A$ és $a_i = 0\,(i \neq j)$, akkor a kifejezés értéke

$$A\sum_{i=1}^{j} c_i + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} b_i c_k - A\sum_{i=1}^{j} b_i.$$

Rögzítsük most a $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$ számokat, a $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n$ változókat tekintve ismét egy lineáris függvényt kapunk, amelyre az előző gondolatmenet megismételhető: valamilyen l-re $b_l = B$, $b_i = 0 \ \ (i \neq l)$ helyettesítéssel növeljük a kifejezés értékét. Ha $l > j$, akkor

$$A\sum_{i=1}^{j} c_i + B\sum_{k=l}^{n} c_k \leq M\sum_{k=1}^{n} c_k$$

adódik, ha $l \leq j$, akkor az

$$A\sum_{i=1}^{j} c_i + B\sum_{k=l}^{n} c_k - AB$$

kifejezést kapjuk. Ez utóbbira még egyszer ismételjük meg a módszerünket, legyen $c_m = C$, $c_i = 0 \ (i \neq m)$. Akkor $m < l$ esetén AC, $m > j$ esetén pedig BC majorálja a kifejezést, és egyik sem nagyobb, mint MC. Elég tehát $l \leq m \leq j$ esettel foglalkozni, ekkor a kifejezés értéke

$$AC + BC - AB,$$

amiről az első részben beláttuk, hogy nem nagyobb MC-nél.

B. P.