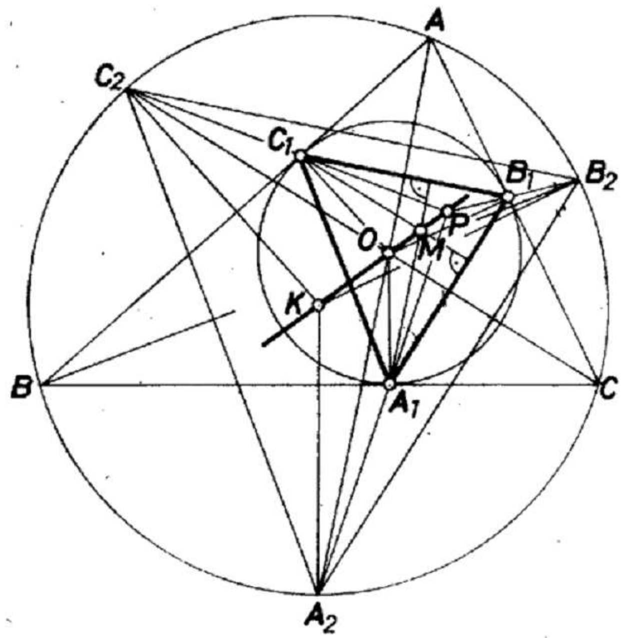
Jelöljük az ABC háromszög körülírt körének középpontját K-val, beírt körének érintési pontjait az oldalakon A_1, B_1, C_1-gyel, középpontját O-val. Az AO, BO, CO messe az ABC háromszög körülírt körét rendre az A_2, B_2, C_2 pontokban. (A_2 felezi a BC ívet, hasonló mondható B_2 és C_2-ről is.) Az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja M; belátjuk, hogy K, O és M egy egyenesen vannak.



Legyen P a beírt és körülírt körnek az a hasonlósági pontja, amelyből pozitív arányú nyújtással vihetők egymásba. Nyilvánvalóan P az OK egyenesen van. (Az $O = K$ esetben az állítás triviális, tehát ezt nem vizsgáljuk.) P-ből nagyítsuk fel a beírt kört úgy, hogy O a K pontba menjen át. P hasonlósági középpont, így a beírt kör képe a körülírt kör. OA_1 képe a körülírt kör OA_1-gyel párhuzamos, vele egyirányú sugara, tehát KA_2. Hasonlóan C_1 képe C_2, B_1 képe B_2. Belátjuk még, hogy M képe O; ezzel a bizonyítás kész, hiszen ekkor P, O és M egy egyenesen vannak; másfelől P, O és K is egy egyenesen vannak, így M rajta van az OK egyenesen.

Láttuk, hogy $A_1B_1C_1$ háromszög képe az $A_2B_2C_2$ háromszög. Így elég belátnunk, hogy az $A_2B_2C_2$ háromszög magasságpontja O. Az AC_1OB_1 négyszög deltoid, mert $AC_1 = AB_1$ (ezek ui. külső pontból egy körhöz húzott érintők) és $C_1O = OB_1$ (mindkettő a beírt kör sugara). Így AO merőleges C_1B_1-re, a nagyítás miatt C_1B_1 párhuzamos C_2B_2-vel, így AA_2 merőleges C_2B_2-re. Hasonlóan belátható, hogy BB_2 és CC_2 is az $A_2B_2C_2$ háromszög magasságvonalai.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)