Alakítsuk át először a binomiális együtthatók szorzatát

$$P_n = \binom{n}{0}\binom{n}{1}\dots\binom{n}{n} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\dots\frac{n(n-1)\dots 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = \prod_{j=1}^{n}\frac{j^j}{j!}.$$

Az itt fellépő tényezők egyenlőek az $e_i = \left(1+\dfrac{1}{i}\right)^i$ sorozat első $(j-1)$ tagjának a szorzatával:

$$e_1 e_2 \dots e_{j-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\ldots\cdot\frac{j^{j-1}}{(j-1)^{j-1}} = \frac{j^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{j^j}{j!}.$$

Emiatt

$$P_n = \prod_{j=2}^{n}\Big(\prod_{i=1}^{j-1} e_i\Big) = \prod_{i=1}^{n-1} e_i^{n-i}.$$

Vezessük be az $e_0 = 1$, $m = \dfrac{n(n+1)}{2}$ és $Q_n = \sqrt[n]{G_n^2}$ jelöléseket, akkor

$$Q_n = \sqrt[m]{P_n} = \sqrt[m]{\prod_{i=0}^{n-1} e_i^{n-i}},$$

tehát a vizsgálandó sorozat négyzete m szám mértani közepével egyenlő, amelyek közül n az e_0-lal, $(n-1)$ az e_1-gyel, általában $(n-i)$ az e_i-vel egyenlő. Mivel az e_i sorozat monoton nő, és e a határértéke, ebből következik, hogy $1 = e_0 \leqq Q_n \leqq e$, elegendő belátni, hogy tetszőleges k-hoz található olyan N, hogy $Q_n \geqq e_k$, ha $n > N$. Valóban,

$$Q_n = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{e_i}{e_k}\right)^{n-i}}\cdot\sqrt[m]{\left(\prod_{i=1}^{k} e_k^{n-i}\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n} e_i^{n-i}\right)},$$

és itt a második szorzat minden tényezője legalább e_k, így elég belátni, hogy az első szorzat minden tényezője tart 1-hez, midőn n tart a végtelenbe. Ez viszont az exponenciális függvény folytonossága miatt igaz, hiszen az e_i/e_k tag kitevője

$$\frac{n-i}{m} = \frac{2(n-i)}{n(n+1)}$$

tart 0-hoz, így a hatvány valóban tart 1-hez.

Megjegyzések. 1. Hasonlóan látható be, hogy az e_i számok mértani közepe,

$$\sqrt[n]{e_0 e_1 \dots e_{n-1}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

is tart e-hez, tehát $n!$ értékére jó közelítést kapunk, ha az n/e hányados n-edik hatványát vesszük. Pontosabb becslést ad a következő egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{10n}\right).$$

2. Az a^x exponenciális függvényt tetszőleges $a > 0$ alap mellett értelmezhetjük az összes valós x-re, az $a = 1$ alap mellett a függvény állandó, $a > 1$ mellett monoton növő, $a < 1$ mellett monoton fogyó. A

$$b^x = a^x \log_a b$$

összefüggés alapján elég egy alap, mondjuk $a = e$ mellett vizsgálni a függvényt.

Az $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergenciája alapján belátható, hogy az e^x függvény deriváltja sajátmaga, emiatt az e alapú $\log x$ deriváltja $1/x$. A fenti feladatban vizsgált sorozat logaritmusa a $(2x-1)\log x$ függvény $(0,1)$ intervallum feletti integráljának közelítő összege, határértéke ennek alapján is meghatározható.