

Legyen

$$F = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad G = \sum_{j=0}^m b_j x^j$$

az (1) tetszőleges megoldása ( $a_n \neq 0$ ,  $b_m \neq 0$ ). Ha  $m \leq 1$ , az idézett megoldásban beláttuk, hogy  $F$  és  $G$  csak  $\pm f_m$ ,  $\pm g_m$  lehet. (A feladat szövege kicsit pontatlan,  $F$  nyilván  $-f_0$  is lehet.) Ha  $m \geq 2$ , akkor  $n \geq 1$ , és mivel (1)-ben mindkét polinomnak a négyzete szerepel, feltehetjük, hogy  $a_n > 0$ ,  $b_m > 0$ . Ekkor (1) csak  $m = n - 2$ , és  $a_n = b_m$  mellett teljesülhet. Mivel  $(f_1, -g_1)$  is gyöke (1)-nek, az idézett megoldás alapján

$$\varphi = f_1 F - (x^4 - 2x)g_1 G, \quad \psi = f_1 G - g_1 F$$

is gyöke (1)-nek. Megmutatjuk, hogy  $\psi$  a  $G$ -nél alacsonyabb fokú polinom. Az első négy együtthatója ugyanis rendre  $(b_m - a_n)$ ,  $(b_{m-1} - a_{n-2})$ ,  $(b_{m-1} - a_{n-2})$ ,  $(b_{m-3} - b_m - a_{n-3})$  és ezek mindegyike azért egyenlő 0-val, mert  $F^2$  és  $(x^4 - 2x)G^2$  első négy együtthatója egyenlő egymással ( $2n \geq 8$ ).

Mivel a  $(\varphi, \psi)$ ,  $(f_1, g_1)$  megoldások „összeszorzásából” épp az  $F$ ,  $G$  megoldásokat kapjuk, ha  $\varphi$ ,  $\psi$  eleme a mondott sorozatnak,  $F$ ,  $G$  is eleme annak.

Ha nem ez volna a helyzet, hasonlóan tovább menve lépésről lépésre egyre alacsonyabb fokú polinomokat kapnánk, ami nyilván lehetetlen. A feladat állítását ezzel igazoltuk.