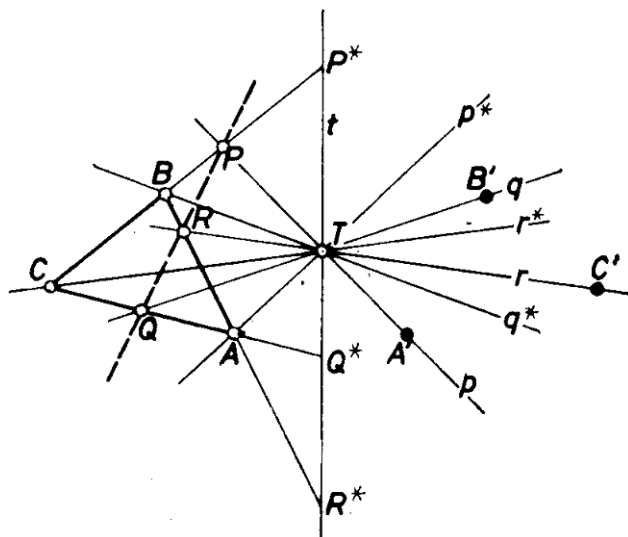


Nyilván fel kell tennünk, hogy T különbözik az A, B, C pontoktól, különben p, q, r nincs meghatározva. Párhuzamos egyenesek metszéspontját szokásos módon ideális, végtelen távoli pontként értelmezve, kiterjeszthető a feladat állítása, ezt az általános alakot bizonyítjuk.



Jelöljük t -nek a BC, CA, AB egyenesekkel alkotott metszéspontját rendre P^* -gal, Q^* -gal, R^* -gal. Irányítsuk tetszőlegesen a p, q, r és t egyeneseket, és jelöljük p -nek, q -nak, r -nek t -re vonatkozó tükörképét p^* -gal, q^* -gal, r^* -gal. Menelaosz tétele szerint abból, hogy P^*, Q^*, R^* egy egyenesen vannak, következik, hogy

$$(ABR^*)(BCP^*)(CAQ^*) = -1,$$

és ha belátjuk, hogy

$$(ABR)(BCP)(CAQ) = -1,$$

ebből következik, hogy P, Q, R is egy egyenesen vannak. Elég tehát belátni, hogy

$$(1) \quad (ABRR^*)(BCPP^*)(CAQQ^*) = 1,$$

ahol például $(ABRR^*) = (ABR):(ABR^*)$, és $(ABR) = AR:RB$. (A felhasznált tételek és fogalmak megtalálhatók Hajós Gy.: Bevezetés geometriába c. könyvében.) Papposz tétele szerint (1) helyett elegendő belátnunk, hogy

$$(2) \quad (p^*q^*rt)(q^*r^*pt)(r^*p^*qt) = 1.$$

Jelöljük a t irányított egyenest p, q, r -be vivő forgatások nagyságát rendre α, β, γ -val, akkor a kettős viszony definíciója szerint

$$\begin{aligned} (p^*q^*rt) &= \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} : \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \\ (q^*r^*pt) &= \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\gamma + \alpha)} : \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \\ (r^*p^*qt) &= \frac{\sin(\gamma + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} : \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Ebből pedig közvetlenül következik a bizonyítandó (2) összefüggés.