Ha volna ilyen f függvény, arra minden $0 \leq x \leq 1$ mellett $0 \leq f(x) \leq 1$ teljesülne, hiszen az A, B halmazok a $[0,1]$ intervallum részei. Megmutatjuk, hogy minden olyan $[0,1]$-ben értelmezett folytonos $f(x)$ függvény, amelyre $0 \leq f(x) \leq 1$, létezik olyan $c \in [0,\ 1]$, hogy $f(c) = c$. Ebből következik, hogy a kívánt felosztás nem lehetséges, hiszen c és $f(c)$ ugyanabba a halmazba tartozik.

Tekintsük a $g(x) = f(x) - x$ függvényt. Ez egyrészt folytonos, másrészt $g(0) = f(0) \geq 0$ és $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Ezért Bolzano tétele miatt létezik olyan $c \in [0,\ 1]$, melyre $g(c) = 0$, azaz $f(c) = c$. Ezzel állításunkat beláttuk.

Knébel István (Budapest, József Attila Gimn.)

Megjegyzés. Nem folytonos $f(x)$ függvényre létezhet felbontás. Legyen például

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in [0,\ 1) \\ 0, & \text{ha} \quad x = 1 \end{cases} \qquad A = [0,\ 1) \quad \text{és} \quad B = \{1\}$$

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)