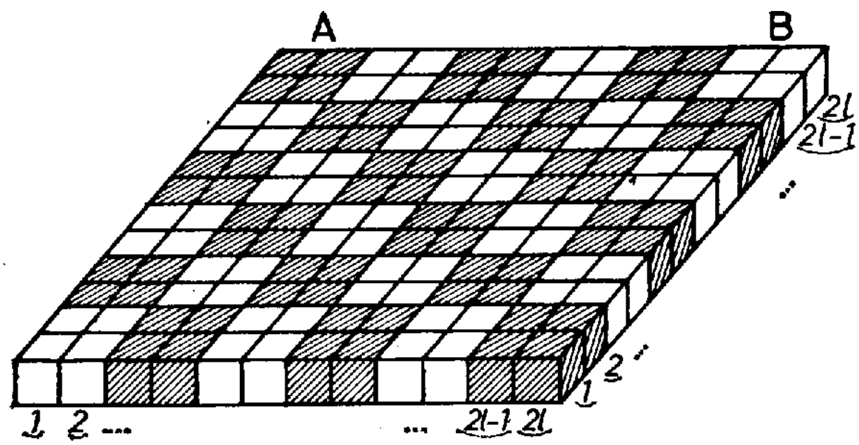
1. Először belátjuk, hogy ha létezik a kívánt színezés, akkor k csak páros lehet.

Vegyünk fel egy térbeli koordináta-rendszert, melyben az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ alapvektorok a kis kockák egy-egy élével párhuzamosak. Mindegyik kocka középpontjából indítsunk vektorokat a vele szomszédos és azonos színű kockák középpontjaiba. Ezen vektorok mindegyike nyilván az alapvektorok valamelyikével vagy ellentettjével egyenlő. Ha az O_1 kockaközéppontból indítottunk vektort az O_2 kockaközéppontba, akkor O_2-ből is indítottunk O_1-be. Ezért nyilvánvaló, hogy a k^3 db vektor összege nullvektor. Jelölje rendre a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 azon kis kockák számát ($a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3=k^3$), amelyek középpontjaiból rendre $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$ vektort indítottunk. A mondottak miatt:

$$a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}+b_1(-\mathbf{i})+b_2(-\mathbf{j})+b_3(-\mathbf{k})=\mathbf{0},\ \text{azaz}$$
$$(a_1-b_1)\mathbf{i}+(a_2-b_2)\mathbf{j}+(a_3-b_3)\mathbf{k}=\mathbf{0}.$$

Tudjuk, hogy ez akkor és csak akkor lehet, ha $a_1=b_1$, $a_2=b_2$ és $a_3=b_3$. Ez azt jelenti, hogy $k^3=2(a_1+a_2+a_3)$, vagyis k^3 páros, s így k is páros. Ezt akartuk belátni.

3. Most páros k-ra megadunk egy lehetséges színezést. Legyen $k=2l$. Vegyünk $2l$ db-ot az alábbi $2l\times 2l\times 1$ hasábból. A hasáb kockáit az ábrán látható módon színezzük ki.



Ily módon egy kockának pontosan két vele azonos szomszédja lesz. Ezeket a négyzet alapú hasábokat helyezzük fokozatosan egymásra úgy, hogy A-val jelzett fölé B-vel jelzett, B-vel jelzett fölé A-val jelzett kerüljön. Ez az elhelyezési mód azt biztosítja, hogy bármely kocka felett és alatt ellenkező színű kocka lesz. Ezt a hasábról mondottakkal egybevetve következik, hogy jó színezést kaptunk.

Knébel István (Budapest, József A. Gimn.)