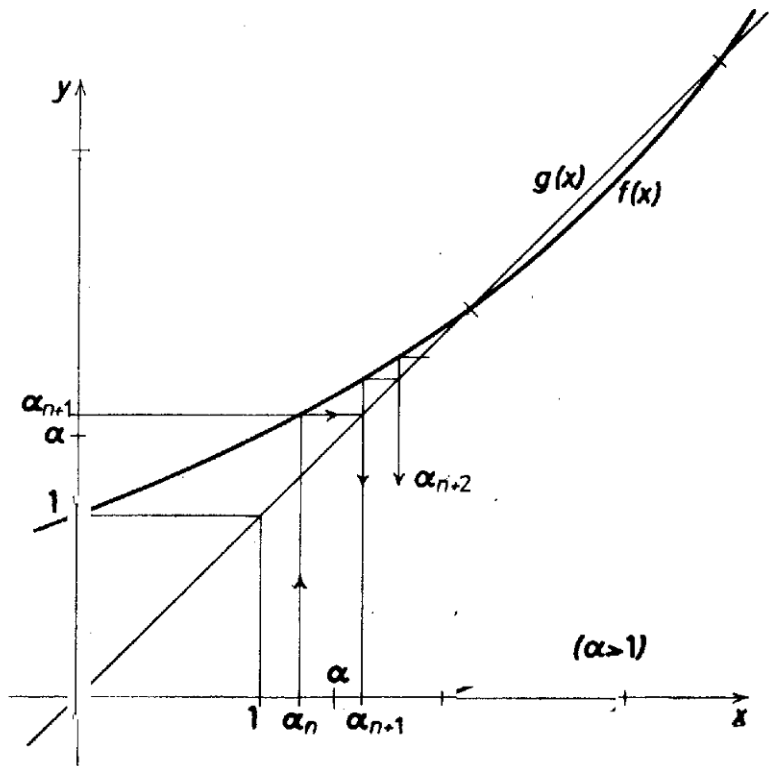
Jelöljük az a^x függvényt $f(x)$-szel. Sorozatunk ebből az

$$\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$$

helyettesítéssel kapható. Annak érdekében, hogy egy adott α_n-ból kiindulva a sorozat további tagjait geometriailag szemléltethessük, rajzoljuk fel a $g(x) = x$ függvényt is az $f(x)$ képe mellé. Ennek segítségével az α_{n+1} ordinátát átfordíthatjuk abszcisszává, és kikereshetjük f itt felvett értékét. Tehát az x tengely α abszcisszájú pontjából indulva „felmegyünk" az $(\alpha,\ f(\alpha))$ pontba, innen az x tengellyel párhuzamosan átmegyünk az $(\alpha_1,\ \alpha_1)$ pontba, majd megint az y tengellyel párhuzamosan haladva az $(\alpha_1,\ f(\alpha_1))$ ponton át folytatjuk utunkat.



Ha $\alpha = 1$, α_n értéke is 1, a sorozat tagjai egyenlőek. Ha $\alpha > 1$, $f(x)$ monoton nő, tehát a sorozat is nő. Sorsát az határozza meg, hogy metszi-e $f(x)$ a $g(x)$-et vagy sem. Ha metszi, a sorozat „beleütközik" ebbe a gyökbe, nem léphet rajta túl, és ezt fokozatosan megközelíti. Mivel $f(0) = 1 > g(0)$, az

(1) $$f(x) = g(x)$$

egyenlet legkisebb pozitív gyökét β-val jelölve látható, hogy $0 < x < \beta$ mellett $x < f(x) < \beta$. Ha tehát az $\alpha_{-1} = 1$ értékből indulunk ki, az $\alpha_0 = f(1) = \alpha,\ \ldots,\ \alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$ sorozat tagjai monoton nőnek, és mindegyik kisebb β-nál. Emiatt a sorozat konvergál, és határértéke gyöke (1)-nek.

Ha különböző α-k mellett vizsgáljuk egy adott pozitív x-ben az $f(x)$ függvényértékeket, a monoton növekvő $\varphi(\alpha) = \alpha^x$ függvényt kapjuk. Emiatt (1) gyöke α monoton növekvő függvénye. Ahogy növeljük α-t, úgy emelkedik az $f(x)$ függvény görbéje, és egy bizonyos $\alpha_{\max}$-ot túllépve olyan α-kat kapunk, amelyek mellett (1)-nek egyáltalán nincs gyöke. Ilyen például az $\alpha = e$ érték, hiszen emellett $f'(x) = e^x > g'(x) = 1$; ha $x > 0$, az $f - g$ különbség monoton nő. Ha $\alpha = \alpha_{\max}$ mellett az f és g függvénygörbék érintik egymást, emiatt $\alpha_{\max}$ az

(2) $$f'(x) = g'(x)$$

egyenletnek is gyöke. (Ezt itt a szemlélet alapján fogadjuk el, de nem nehéz belátni az állításunk helyességét.) Az $(1) - (2)$ egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$\alpha_{\max} = e^{1/e}$$

Az α_n sorozat $\alpha > \alpha_{\max}$ esetén is monoton nő, de nem lehet korlátos, hiszen akkor konvergens volna, és (1)-nek lenne gyöke. Így ebben az esetben csak az lehet, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty.$$

Ha $0 < \alpha < 1$, az $f(x)$ függvény monoton fogy, és (1)-nek egyetlen gyöke van a $0 < x < 1$ intervallumban. Most $0 < \alpha_1 < \alpha_0 < 1$, tehát

$$f(0) = 1 > f(\alpha_1) = \alpha_2 > f(\alpha_0) = \alpha_1 > f(1) = \alpha_0.$$

Hasonlóan tovább haladva kapjuk, hogy $0 < \alpha_n < 1$, és az α_{2k} sorozat monoton nő, α_{2k+1} pedig monoton fogy. Így az α_n sorozat most is konvergens, és határértéke (1) egyetlen gyöke. Azt kapjuk tehát, hogy ha $0 < \alpha \leq e^{1/e} (= 1{,}4446678)$, az α_n sorozat konvergens, és határértéke (1) kisebbik pozitív gyöke. Különben α_n végtelenbe tart.

Tar József (Eger, Gárdonyi G. Gimn.)