A korábban közölt megoldásnak (KÖMAL 1978/8–9., 153–155. oldal) az $\alpha \geq 1$ esettel foglalkozó része lényegében helyes. A $0 < \alpha < 1$ esetben az még igaz, hogy α_{2k} monoton nő és α_{2k+1} monoton fogy (bár ennek bizonyításába is hiba – talán sajtóhiba – csúszott, hiszen most α_0 nem nagyobb α_1-nél, hanem csakúgy, mint az α_{2k} részsorozat minden tagja, kisebb α_1-nél is, és az α_{2k+1} részsorozat minden más tagjánál is). Ebből azonban – még ha azt is felhasználjuk, hogy a sorozat korlátos – csak annyi következik, hogy az α_{2k} részsorozat is konvergens és az α_{2k+1} részsorozat is konvergens, az azonban nem biztos, hogy a két sorozat határértéke megegyezik. Most ugyanis csak annyit tudunk a két részsorozat határértékéről a képzési szabály alapján, hogy ha őket rendre β-val, γ-val jelöljük, akkor gyökei a

$$\beta = f(\gamma), \qquad \gamma = f(\beta) \tag{1}$$

egyenletrendszernek, ahol $f(x)$ most is az α^x függvényt jelöli. Amennyiben (1)-nek több gyökpárja van, azokra egyrészt nyilván $0 < \beta,\ \gamma < 1$ teljesül, másrészt a β, γ határértékekről még azt is tudjuk, hogy $\beta \leq \gamma$ épp az előbb említett $\alpha_{2k} < \alpha_{2k+1}$ összefüggés miatt. A megoldás első felében alkalmazott meggondoláshoz hasonlóan az is belátható, hogy az (1) gyökpárjai közül a $(\beta,\ \gamma)$ az, amelyben β a legkisebb, és ennek megfelelően γ a legnagyobb.

Azt kell tehát megvizsgálnunk, van-e (1)-nek olyan gyökpárja, amelyben $\beta < \gamma$. Jelöljük f inverzét φ-vel: $\varphi(x) = \log_\alpha x$. Mivel (1) első egyenlete alapján $\gamma = \varphi(\beta)$ az

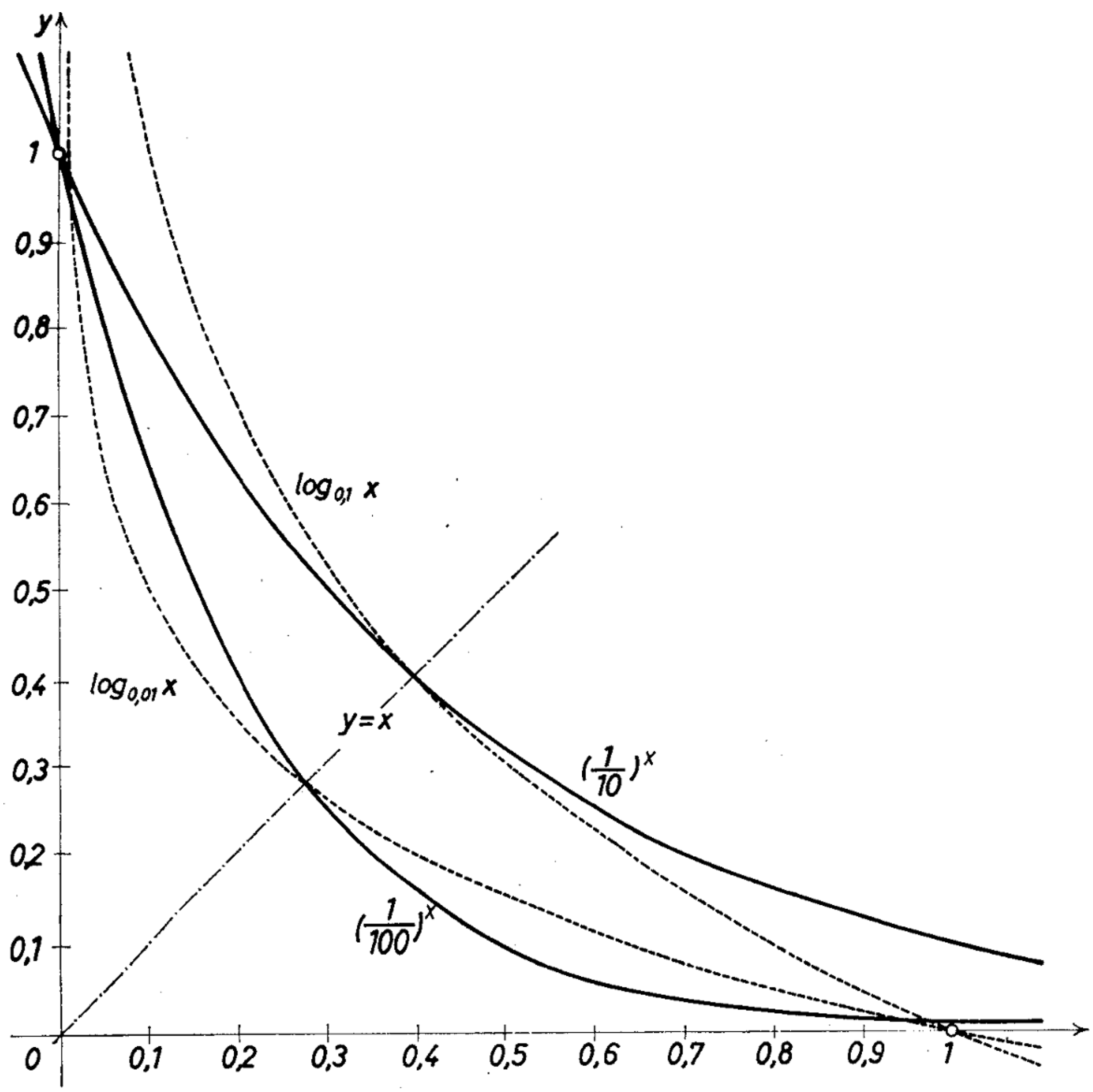
$$f(x) - \varphi(x) = 0 \tag{2}$$

egyenlet legkisebb gyöke, ennek az egyenletnek biztosan gyöke az

$$f(x) = x, \tag{3a}$$

$$\varphi(x) = x \tag{3b}$$

egyenletek egyetlen közös x_0 gyöke, a kérdés csak az, hogy itt az f, φ függvények képei milyen irányban metszik át egymást.



Ha ugyanis $f'(x_0)-\varphi'(x_0)<0$, akkor

$$\lim_{x\to 0}\,[f(x)-\varphi(x)]=-\infty$$

miatt (2)-nek biztosan létezik x_0-nál kisebb gyöke. Másrészt mivel $f'(x)=f(x)\cdot\log_e\alpha$ és $\varphi'(x_0)=1/f'(x_0)$, azért $f'(x_0)-\varphi'(x_0)\ge 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x_0\log_e\alpha\ge -1$, vagyis

$$e^{x_0\log_e\alpha}=\alpha^{x_0}=x_0\ge e^{-1},\qquad \log_e\alpha\ge -\frac{1}{x_0}\ge -e,\ \text{ahonnan } \alpha\ge 1/e^e.$$

Ebben az esetben az $f(x)-\varphi(x)$ függvény $x>0$-ra szigorúan monoton nő, hiszen deriváltjának x-szerese

$$x\big(f'(x)-\varphi'(x)\big)=x\cdot f(x)\cdot\log_e\alpha-\frac{1}{\log_e\alpha}\ge -\frac{1}{e}-\frac{1}{\log_e\alpha}\ge 0,$$

tehát (2)-nek legfeljebb egy gyöke lehet.

Összefoglalva, a vizsgált sorozat csak akkor konvergens, ha

$$1/e^e\le\alpha\le e^{1/e},$$

ha viszont $0<\alpha<1/e^e$, akkor az $\alpha_{2k},\ \ \alpha_{2k+1}$ részsorozatok ugyan konvergensek, de határértékük különböző.

Magyar Zoltán levele alapján