I. megoldás. Az első másodperc végén a kötél 2000 cm lesz, és a csiga ezalatt 1 cm-t tesz meg, tehát 1 másodperc múlva a kiindulási ponttól legalább 1 cm-re van. Így a csiga a 10 m-nek legalább az 1/2000 részét teszi meg az első másodperc végéig. Hasonlóan: a k. másodperc végén a kötél hossza $(k+1)\cdot 1000$ cm; és a csiga attól a ponttól, ahol a másodperc kezdetén volt, legalább 1 cm-re van, így a csiga a k. másodpercben a 10 m-nek legalább az $1/(k+1)$ 1000-ed részét teszi meg. Ezért az n. másodperc végéig a csiga a kötélnek legalább $1/2000+1/3000+\ldots+1/(n+1)$ 1000-ed részét teszi meg. Vagyis ha

$$1/2+1/3+\ldots+1/(n+1)>1000 \tag{1}$$

egy alkalmas n-re, akkor a csiga a gonosz manó ügyködése ellenére B-be ér. Az (1) pedig teljesül, mert mint ismeretes, tetszőleges nagy K számhoz található olyan n, hogy

$$1+1/2+1/3+\ldots+1/n$$

nagyobb, mint K.

II. megoldás. Legyen $S(t)$ cm a csiga távolsága B-től t idő múltán. Nyilván $S(0)=1000$, és amikor a csiga a gumikötél B végpontjába ér, $S(t^*)=0$. Legyen $v(t)$ a csiga sebessége a B ponthoz viszonyítva. Nyilván $v(0)=999$, mert a manó sebessége 1000 cm/s, a csigáé pedig ellenkező irányban 1 cm/s.

Általában a csiga sebességére a t időpillanatban a következő egyenlőség érvényes:

$$v(t)=\frac{S(t)}{(t+1)1000}1000-1=\frac{S(t)}{t+1}-1. \tag{2}$$

Ugyanis a t. pillanatban a kötél hossza $(t+1)1000$, és ezen a csiga B-től számítva $S(t)$-nyire van, tehát feltételezve a kötél egyenletes megnyúlását, a manó 1000 cm/s sebessége miatt a csiga tartózkodási pontja $\frac{S(t)}{(t+1)1000}1000$ cm/s sebességgel távolodik B-től, másrészt a csiga a kötélhez képest 1 cm/s sebességgel tart B felé. Legyen $a(t)$ a csiga gyorsulása t idő múlva. Használjuk fel a mozgásjellemzők fizikából ismert összefüggéseit. Mivel $\dot v(t)=a(t)$, $\dot S(t)=v(t)$, a (2) egyenlőség deriválásával

$$a(t)=\frac{v(t)(t+1)-S(t)}{(t+1)^2}=\frac{S(t)-(t+1)-S(t)}{(t+1)^2}=-\frac{1}{t+1}.$$

A gyorsulás így rendelkezésünkre áll az idő függvényében, ebből integrálással határozhatjuk meg a sebességet: $v(t)=-\ln(t+1)+c$. Ahol a c konstans, a $v(0)=999$ feltétel alapján 999, tehát

$$v(t)=-\ln(t+1)+999. \tag{3}$$

Ebből (2) átrendezésével kapjuk, hogy

$$S(t)=(t+1)\left(-\ln(t+1)+1000\right).$$

Láthatjuk, hogy a $t^*=e^{1000}-1$ értékre $S(t^*)=0$, vagyis a csiga $e^{l000}-1\approx 1{,}97\cdot 10^{434}$ sec múlva eljut B-be.

(P. T.)