I. megoldás. A keresett határértéket jelöljük H-val.

$$\text{Legyen} \qquad u=\frac{x+1}{x+2}, \qquad \text{azaz} \qquad x=\frac{2u-1}{1-u}\ (x\neq -2,\ u\neq 1).$$

H akkor és csak akkor létezik, ha $G=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{2u-1}{1-u}\left(\text{arc tg } u-\dfrac{\pi}{4}\right)$ létezik és ekkor nyilván $H=G$ (ez a függvények határértékére vonatkozó tételekből következik). Azonban: $\lim\limits_{u\to 1}(1-2u)=-1$ és $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{\text{arc tg } u-\dfrac{\pi}{4}}{u-1}=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{\text{arc tg } u-\text{arc tg } 1}{u-1}$. Ez utóbbi határérték azonban a differenciálhányados-függvény definíciója miatt:

$$(\text{arc tg } u)'_{u=1}=\left(\frac{1}{1+u^2}\right)_{u=1}=\frac{1}{2}.$$

Alkalmazva a szorzat határértékéről tanultakat, adódik, hogy $H=-\dfrac{1}{2}$.

Brindza Béla (Csongrád, Batsányi J. Gimn.)

II. megoldás. Könnyen látható, hogy

(1) $$\text{arc tg } x-\text{arc tg } y=\text{arc tg}\frac{x-y}{1+xy}\ (xy\neq -1),$$

és

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{arc tg } x}{x}=1.$$

A keresett határérték kiszámítása ezek után a következőképpen történhet:

$$H=\lim_{x\to\infty} x\left(\text{arc tg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\infty} x\left(\text{arc tg}\frac{x+1}{x+2}-\text{arc tg } 1\right)$$

(1) miatt, ez tovább alakítható, s így (2) alapján:

$$H=\lim_{x\to\infty} x\ \text{arc tg}\frac{-1}{2x+3}=\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{-1}{2x+3}\cdot\frac{\text{arc tg}\dfrac{-1}{2x+3}}{\dfrac{-1}{2x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2x+3}\cdot\frac{\text{arc tg}\dfrac{-1}{2x+3}}{\dfrac{-1}{2x+3}}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2x+3}\right)\left(\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\text{arc tg } y\right)=-\frac{1}{2}.$$

Gubics József (Székesfehérvár, Ságvári E. Szakközépisk.)

Megjegyzés. L'Hospital szabály segítségével is megoldható a feladat (de meg kell győződni alkalmazhatóságának feltételeiről!)