A válasz: igen, ennek bizonyítására elegendő megadnunk egy megfelelő felosztást.

A halmaz: 1; 3, 4, 5, 6; 25, 26, 27, $\ldots$, 120; $\ldots$
B halmaz: 2; 7, 8, $\ldots$, 24; 121, 122, $\ldots$, 720, $\ldots$

A képzés módja: az A csoportba kerülnek azok az x természetes számok, melyekre $(2k)!+1 \le x \le (2k+1)!$, a B csoportba pedig 2 és azon y számok, melyekre

$$(2k+1)!+1 \le y \le (2k+2)! \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Nyilvánvaló, hogy így minden természetes szám pontosan egy csoportban szerepel.

Annak bizonyítására, hogy egyik csoport sem tartalmaz végtelen mértani sorozatot, induljunk ki egy tetszőlegesen megadott q hányadosú végtelen mértani sorozatból. Belátjuk, hogy található a sorozatnak két olyan tagja, hogy egyik A-ban, a másik B-ben van.

(Nyilván q természetes szám.) Legyen m a sorozat $(q+1)!$-nál nagyobb elemei közül a legkisebb. Ilyen m biztosan létezik, mert $(q+1)!$-nál kisebb természetes szám csak véges sok van. Jelölje n azt a (egyetlenegy!) természetes számot, amelyre

$$n!+1 \le m \le (n+1)! \tag{1}$$

Ezért m definícióját figyelembe véve adódik, hogy

$$n \ge q+1.$$

Vizsgáljuk a sorozat $m,\ mq,\ mq^2,\ \ldots$ tagjait. Mivel $\lim\limits_{k\to\infty}(mq^k) = +\infty$, létezik olyan k természetes szám, hogy

$$mq^{k-1} \le (n+1)! < mq^k.$$

Viszont

$$mq^k = m\cdot q^{k-1}\cdot q \le mq^{k-1}\cdot(n-1) < mq^{k-1}\cdot(n+2) \le (n+1)!\,(n+2) = (n+2)!$$

Így $(n+1)!+1 = mq^k \le (n+2)!$ egyenlőtlenséghez jutottunk. Ez pedig, (1)-et figyelembe véve, azt jelenti, hogy a sorozat első tagja: m és mq^k nem lehet ugyanabban a csoportban, s így ellentmondásra jutottunk.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

Megjegyzések. 1. Legyen $a_1,\ a_2,\ \ldots$ természetes számoknak egy olyan végtelen sorozata, melyre a_{n+1}/a_n szigorúan monoton növekedve $+\infty$-hez tart. $A = \{x/x$ természetes szám és $a_{2n} \le x \le a_{2n+2}\}$ $B = \{x/x$ term. szám és $a_{2n-1} \le x < a_{2n+1}\}$. Ekkor is megfelelő felosztást kapunk.

Balázs Iván József és *Vékony György* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

2. Jelölje X és Y a 2032. feladatnak eleget tevő halmazpárt. Legyen
$A = \{$ azon természetes számok, melyek prímtényezős felbontásában a legnagyobb kitevő $\in X\}$
$B = \{\ldots \in Y\}$
Ez a pár szintén megfelelő.

Sali Attila (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)