I. megoldás. Jelöljük a vizsgálandó számot A-val. Az A végtelen tizedes törtben végtelen sok 0-tól különböző számjegy van, ugyanis minden prímszám első számjegye nem nulla. Tegyük fel, hogy A racionális. Ekkor $A = 0,a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_n$ (a_i, b_i a számjegyeket jelöli). Nem lehet mindegyik b_i nulla, mert ekkor A-ban csak véges sok nullától különböző számjegy lenne. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a $b_ib_{i+1}\dots b_nb_1\dots b_{i-1}$ alakú sorozatokban biztosan van nullától különböző számjegy, s ezért az a_k után álló, bármely n egymás utáni számjegy között van nem nulla számjegy (nevezzük ezt a-tulajdonságnak). Viszont Dirichlet tételéből tudjuk, hogy a $10^{n+1}\cdot x+1$ sorozat ($x = 1, 2, 3, \dots$) végtelen sok prímszámot tartalmaz,[1] e prímszámokban az utolsó jegy 1, előtte n db nulla van. Mivel ez végtelen sokszor megismétlődik, A-ban végtelen sokszor állhat n db 0 egymás után, ez pedig az a-tulajdonságnak ellentmond.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy ez a szám racionális. Ez azt jelentené, hogy a tizedes tört szakaszos lenne, azaz volna olyan k természetes szám, hogy a tizedestört alakban egy helytől kezdve k egymás utáni számjegy rendre megegyezne az utána következő k-val, és így tovább.

Csebisev tétele értelmében minden prímszám és a kétszerese között van prímszám. Ebből többek között az is következik, hogy bármely n természetes számra van legalább két db n-jegyű prímszám. Válasszuk n-et k többszörösére úgy, hogy két n-jegyű prímszám már a tizedes tört szakaszos részére essen. Ezt elég nagy többszörös esetén mindig megtehetjük.

A szakaszosság miatt az első prímszám minden számjegye, mivel n többszöröse k-nak, megismétlődik. Ez azt jelenti, hogy a két prímszám azonos jegyekből áll, azaz azonos. Ez nem lehet igaz, így az a feltevésünk, hogy a felírt tizedes tört racionális, helytelen. Tehát a számunk irracionális.

Hujter Mihály (Pápa, Türr I. Gimn., IV. o. t.)

[1] Lásd *Erdős–Surányi:* Válogatott fejezetek a számelméletből és *Waclaw Sierpinsky:* 200 feladat az elemi számelméletből, Középisk. Szakk. Füzet.)