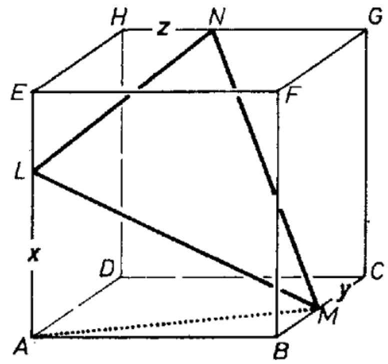
I. megoldás. Jelöljük az egységnyi élű $ABCDEFGH$ kocka AE, BC és GH kitérő éleinek egy-egy pontját rendre L, M, N-nel. Legyen $AL = x$, $CM = y$ és $HN = z$. Célunk, hogy meghatározzuk, x, y, z mely értékeire lesz az LMN háromszög kerülete minimális.



Az oldalak hosszát Pitagorasz tétele segítségével fejezzük ki. Az ABM háromszögből $AM = \sqrt{1+(1-y)^2}$, az LAM háromszögből $LM = \sqrt{x^2+(1-y)^2+1}$. Hasonlóan $MN = \sqrt{1+y^2+(1-z)^2}$ és $NL = \sqrt{(1-x)^2+1+z^2}$. Jelöljük ezek összegét K-val. Némi átalakítás után K-t alulról becsülhetjük a számtani és a négyzetes közép közötti összefüggés segítségével.

$$K = \sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{x^2+(1-y)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2}{6}} + \sqrt{\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+(1-z)^2}{6}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{(1-x)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2+z^2}{6}}\right) \geq$$

$$\geq \sqrt{6}\left(\frac{x+(1-y)+4\left(\frac{1}{2}\right)}{6} + \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)+y+(1-z)}{6} + \frac{(1-x)+4\left(\frac{1}{2}\right)+z}{6}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

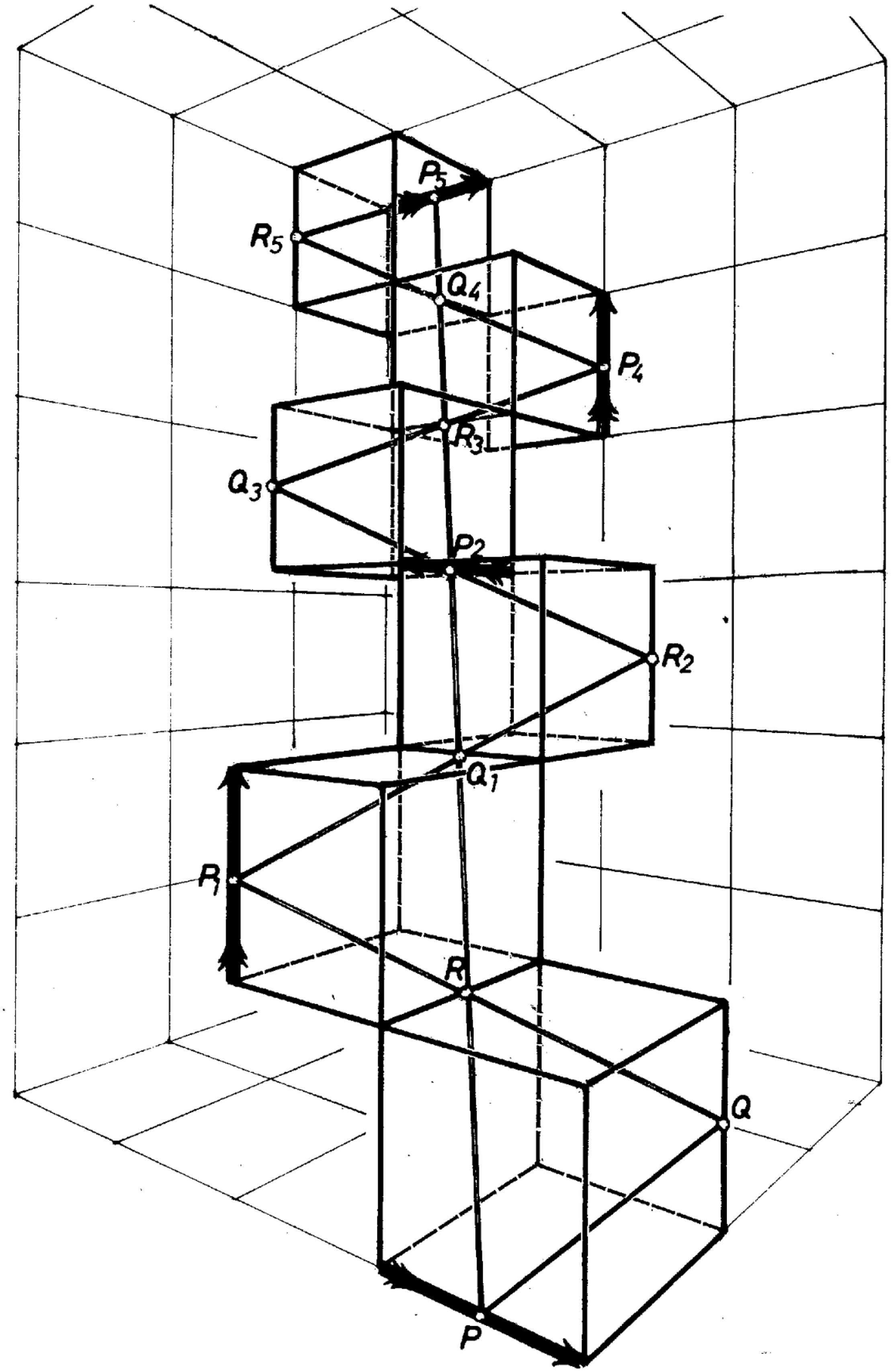
Tehát $K \geq \frac{3}{2}\sqrt{6}$, és egyenlőség csak az $x = y = z = \frac{1}{2} = 1-x = 1-y = 1-z$ esetben áll fenn, azaz ha az LMN háromszög csúcsai a megfelelő élek felezőpontjai.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

II. megoldás. Jelöljük a kitérő éleket p, q, r-rel, felezőpontjaikat P, Q, R-rel. Megmutatjuk, hogy a PQR háromszög kerülete minimális a vizsgált háromszögek között. Jelöljük a PQR háromszög síkját S-sel, és tükrözzük a kockát az r-en átmenő, S-re merőleges síkra. Mivel a kocka centruma benne van S-ben, az a sík, amire tükrözünk p-vel, q-val 45°-os szöget zár be. Emiatt p tükörképe benne marad a p-n átmenő, r-re merőleges lap síkjában, és merőleges p-re. Jelöljük ezt p_1-gyel, q, P, Q tükörképét q_1, P_1, Q_1-gyel. Mivel S merőleges a tükrözés síkjára, P_1, Q_1 is benne lesz S-ben.

Hasonlóan tovább menve lépésről lépésre tükrözzünk a q_1-en, p_2-n, r_3-on, q_4-en átmenő, S-re merőleges síkokra, az $(i+1)$-edik tükrözés után p_i, q_i, r_i tükörképét p_{i+1}, q_{i+1}, r_{i+1}-gyel jelölve ($i = 1$, 2, 3, 4, r_1 azonos r-rel). Közben a P, R, Q_1, P_2, R_3, Q_4, P_5 pontok mind egy egyenesre kerülnek. Hajtsuk végre ezeket a tükrözéseket a p, q, r egyenesek tetszőleges P^*, Q^*, R^* pontján is. A $P^*Q^*R^*$ háromszög kerületének kétszerese szétnyílik a $P^*R^*Q_1^*P_2^*R_3^*Q_4^*P_5^*$ töröttvonal hosszára. Ennek hossza nem lehet kisebb a $P^*P_5^*$ szakasz hosszánál, ez viszont egyenlő PP_5 hosszával és PQR kerületének kétszeresével.

Megjegyzés. Ábránkon a szereplő 6 kockát egy 4×3-as alaprajzú hatszintes építménybe foglaltuk bele. Hogy a térbeli viszonyokat jobban érzékeltessük, egész közel mentünk hozzá, ezért erős perspektívikus torzulások keletkeztek.



P_5
R_5
Q_4
P_4
R_3
Q_3
P_2
R_2
Q_1
R_1
R
Q
P