Komplex számok segítségével oldjuk meg a feladatot. Helyezzük a háromszöget a komplex számsíkra. Kiindulási háromszögünk csúcsainak feleljenek meg az a_1, b_1 és c_1 komplex számok. Legyen

$$\varepsilon = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Elemi számolással adódik, hogy ha az n-edik lépés után nyert háromszög csúcsai a_n, b_n és c_n, akkor

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + (1-\varepsilon)b_n + \varepsilon c_n\right), \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon a_n + b_n + (1-\varepsilon)c_n\right), \\ c_{n+1} &= \frac{1}{2}\left((1-\varepsilon)a_n + \varepsilon b_n + c_n\right). \end{aligned}$$

Ehhez azt kell csak felhasználnunk, hogy az ε komplex számmal való szorzás $+60^\circ$-os elforgatást eredményez (ld. pl. Reiman I.: Geometriai feladatok a komplex számsíkon. Középisk. Szakk. füzet).

Teljes indukcióval bizonyítható a következő:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left[\left(2^{n+1} + (-1)^n\right) a_1 + \left(2^n - (-1)^n\right) \frac{b_1}{\varepsilon} + \left(2^n - (-1)^n\right) c_1\varepsilon\right] \frac{1}{3\cdot 2^n}, \\ b_{n+1} &= \left[\left(2^n - (-1)^n\right) a_1\varepsilon + \left(2^{n+1} + (-1)^n\right) b_1 + \left(2^n - (-1)^n\right) \frac{c_1}{\varepsilon}\right] \cdot \frac{1}{3\cdot 2^n}, \\ c_{n+1} &= \left[\left(2^n - (-1)^n\right) \frac{a_1}{\varepsilon} + \left(2^n - (-1)^n\right) b_1\varepsilon + \left(2^{n+1} + (-1)^n\right) c_1\right] \frac{1}{3\cdot 2^n}. \end{aligned}$$

Így ezekből azonnal következik, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \frac{2}{3}a_1 + \frac{b_1}{3\varepsilon} + \frac{1}{3}c_1\varepsilon = a, \\ \lim_{n\to\infty} b_n &= \frac{1}{3}a_1\varepsilon + \frac{2}{3}b_1 + \frac{c_1}{3\varepsilon} = b, \\ \lim_{n\to\infty} c_n &= \frac{a_1}{3\varepsilon} + \frac{1}{3}b_1\varepsilon + \frac{2}{3}c_1 = c. \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy ez a háromszög szabályos. Ehhez elég belátni, hogy

$$(c-b)\varepsilon = a - b.$$

Behelyettesítve a fenti értékeket, beszorozva és rendezve:

$$\varepsilon\left(\varepsilon - \varepsilon^2 - 1\right) a_1 + b_1\left(\varepsilon^3 + 1\right) + c_1\left(-\varepsilon + \varepsilon^2 + 1\right) = 2b_1\left(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1\right)$$

egyenlőség belátása marad hátra. Ez azonban igaz, mivel

$$\varepsilon^6 - 1 = 0$$

és az

$$\varepsilon^6 - 1 = \left(\varepsilon^3 - 1\right)\left(\varepsilon^3 + 1\right) = \left(\varepsilon^3 - 1\right)(\varepsilon + 1)\left(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1\right)$$

szorzatban

$$\varepsilon^3 - 1 \neq 0, \quad \varepsilon + 1 \neq 0,$$

tehát

$$\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0,$$

ami egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\varepsilon^3 + 1 = 0.$$

Állításunkat ezzel beláttuk.

Összefoglalva eredményünket: az $A_nB_nC_n$ háromszögek egy szabályos háromszöghöz konvergálnak.

Wolfgang Moldenhauer (Rostock) megoldása