

Az adott kockát jelöljük K_1 -gyel, és tegyük fel, hogy élhossza egységnyi. A beírt kocka legyen K_2 .

Ha a két kockának van párhuzamos lapja, mondjuk a fedőlapjaik egybe is esnek, akkor felülnézetben a feladat a négyzetbe írt legkisebb négyzet feladatára redukálódik. Ennek élhossza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ugyanis a négyzet átlója 1-nél rövidebb nem lehet), tehát csak azt kell megmutatni, hogy más esetben sem lehet ennél rövidebb a beírt kocka élhossza.

Mivel K_2 -nek 8 csúcsa és K_1 -nek csak 6 lapja van, kell, hogy legyen K_1 -nek olyan lapja, amelyre legalább két csúcs esik. Ha kizárjuk az előző speciális esetet, akkor csak két csúcs eshet egy lapra, és ezek éllel vannak összekötve. Feltehetjük például, hogy K_1 fedőlapjára esik a K_2 kocka AB éle. Tekintsük ekkor K_2 AB -vel átellenes élét, C_1D_1 -et. Ha az ezen levő két csúcs valamelyike az alaplagra esik, akkor a megfelelő lapátló 1-nél nem lehet kisebb, hiszen K_1 magassága 1. Így K_2 élhossza ebben az esetben sem kisebb $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél.

Ha C_1 és D_1 egyike sem esik K_1 alaplajára, akkor az oldallapok valamelyike is tartalmazza K_2 egy élét, mondjuk EF -et. Ha EF párhuzamos K_1 valamelyik élével, akkor az először tárgyalt speciális eset áll fenn, ezt kizárhatjuk. Ha $AB \parallel EF$, akkor EF párhuzamos a két lap közös élével, ezt az esetet kizártuk, tehát feltehető, hogy $AB \perp EF$. De AB merőleges K_1 oldaléleire is, tehát AB merőleges az EF -et tartalmazó oldallapra, vagyis megint a már vizsgált speciális esetet kaptuk. Így ezekben az esetekben sem lehet K_2 élhossza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél rövidebb, tehát a legkisebb beírt kocka élhossza $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Seress Ákos, Budapest