Ha valamely c értékre teljesül, hogy az $\left(n\sqrt{2}-\frac{c}{n},\ n\sqrt{2}+\frac{c}{n}\right)$ intervallum semmilyen természetes n-re nem tartalmaz egész számot, akkor n értékét 2-nek választva $2\sqrt{2}-\frac{c}{2}\le 2\sqrt{2}<3$ miatt $2\sqrt{2}+\frac{c}{2}\le 3$ kell hogy teljesüljön. Ez pedig akkor és csak akkor igaz, ha $c\le 6-4\sqrt{2}$. Ez azt jelenti, hogy c maximum $6-4\sqrt{2}$ lehet. Megmutatjuk, hogy ez jó is: az $I=\left(n\sqrt{2}-\frac{6-4\sqrt{2}}{n},\ n\sqrt{2}+\frac{6-4\sqrt{2}}{n}\right)$ intervallum semmilyen természetes n-re nem tartalmaz egész számot.

Ennek bizonyítása érdekében hasonlóan járhatunk el, mint az 1971. feladatban. Tegyük fel, hogy az I intervallum tartalmaz egész számot, jelöljük ezt A-val. Ekkor, mivel $n\sqrt{2}-\frac{6-4\sqrt{2}}{n}(n\ge 1)$ pozitív, az

$$\left(\left(n\sqrt{2}-\frac{6-4\sqrt{2}}{n}\right)^2,\qquad \left(n\sqrt{2}+\frac{6-4\sqrt{2}}{n}\right)^2\right)$$

intervallum tartalmazni fogja az A^2 természetes számot. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\left(n\sqrt{2}-\frac{6-4\sqrt{2}}{n}\right)^2>2n^2-1$$

minden természetes n-re és

$$\left(n\sqrt{2}+\frac{6-4\sqrt{2}}{n}\right)^2\le 2n^2+1\qquad n\ge 2 \text{ egészre.}$$

Ebből következik, hogy $n\ge 2$ esetén A^2 a $(2n^2-1,\ 2n^2+1)$ intervallumba esik, azaz $A^2=2n^2$. Ekkor azonban $\sqrt{2}$ racionális szám lenne, $n\ge 2$ esetében tehát ellentmondásra jutottunk:

$$n=1 \text{ esetén}\qquad 1<\sqrt{2}-(6-4\sqrt{2})<\sqrt{2}+(6-4\sqrt{2})<2$$

egyenlőtlenségsorozatból közvetlenül adódik az állítás.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)