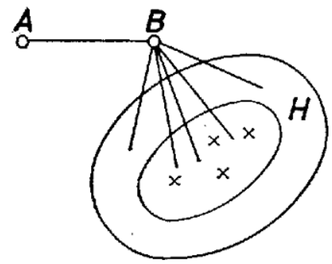
Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, és tekintsük mindazokat az ellenpéldákat, amelyekben a lehető legkevesebb versenyző szerepel. Ezek mindegyikében keressük ki azt a játékost, (vagy az egyik olyat), aki a lehető legkevesebb döntetlen mérkőzést játszotta, legyen ez A. Válasszunk ki olyan ellenpéldát, amelyben A döntetlenjeinek száma minimális, jelöljük ezt k-val. Megmutatjuk, hogy k semmiféle értéket nem vehet fel, ez igazolja az állításunkat.

I. Nem lehet $k = 0$.

A feltétel szerint mindenkihez található olyan, akivel összesen páratlan sok döntetlent játszott, tehát mindenki legalább egy döntetlen mérkőzést játszott.



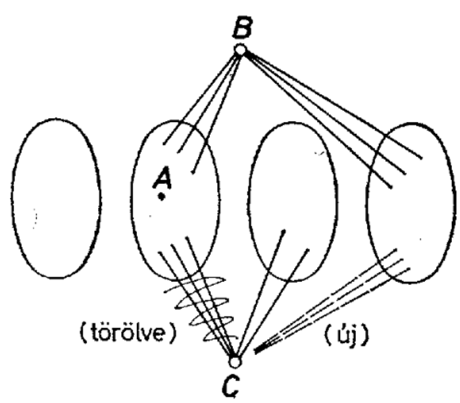
1. ábra

II. Nem lehet $k = 1$.

Tegyük fel, hogy A csak B-vel játszott döntetlenül, és hagyjuk el az A és B játékosokat (1. ábra). Továbbra is ellenpéldát kapunk: a játékosok száma páratlan, és ha a többi résztvevő egy H részhalmazában csak B játszott volna páratlan sok döntetlent, akkor a $H \cup \{A\}$ halmazhoz nem volna „jó” résztvevő. Így ellentétbe kerültünk azzal, hogy az ellenpéldában a lehető legkevesebb versenyző szerepel.

III. Nem lehet $k \geq 2$ sem.

Ha A döntetlenül mérkőzött B-vel és C-vel is, módosítsuk a bajnokság eredményét a következő módon (2. ábra). Ha egy résztvevő B-vel döntetlenül játszott, de C-vel nem, akkor a C-vel való játszmája is legyen döntetlen; ha egy résztvevő B-vel és C-vel is döntetlenül játszott (mint például A), akkor a C és közte lefolyt játszmát nyerje meg C. Az összes többi eredményt változatlanul hagyjuk.



2. ábra

Az olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy a módosítás után is teljesülnek a feladat feltételei. Ez viszont lehetetlen, hiszen a módosítás után A-nak eggyel kevesebb, $(k-1)$ döntetlenje van, mint előtte, noha feltettük, hogy a döntetlen mérkőzések minimális száma k.

Mivel több eset nincs, a feladat állítását bizonyítottuk.

P. T.