Tekintsük a $b_n = \overset{2}{\log} a_n$ sorozatot. Az a_n sorozatra adott összefüggésből következik, hogy

$$b_{n+1} = (1 + b_n) \cdot 2^{-b_n}, \qquad b_1 = \overset{2}{\log} a_1,$$

továbbá $\lim a_n$ akkor és csak akkor létezik, ha vagy $\lim b_n$ létezik, vagy $\lim b_n = -\infty$ (és ekkor $\lim a_n = 0$). Ezért a továbbiakban csak a b_n sorozattal foglalkozunk.

Tekintsük az

$$f(x) = (1 + x) \cdot 2^{-x}$$

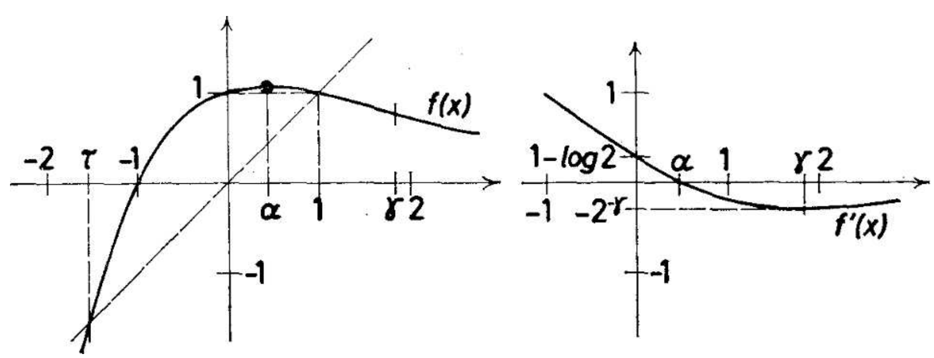
függvényt. Ennek segítségével a rekurziót $b_{n+1} = f(b_n)$ alakban írhatjuk. Mivel f határértéke $+\infty$-ben 0, $-\infty$-ben $-\infty$, továbbá deriváltja (itt és a továbbiakban a logaritmusok e alapúak)

$$f'(x) = (1 - \log 2 - x \cdot \log 2) \cdot 2^{-x}$$

az egyetlen $\alpha = -1 + 1/\log 2 \approx 0,443$ helyen tűnik el, f ábrája olyan, mint ahogyan azt az 1. ábra mutatja. A 2. ábrán $f'(x)$-et ábrázoltuk, a minimumhelyet (f inflexiós pontját) az

$$f''(x) = \log 2 \cdot (-2 + \log 2 + x \cdot \log 2) \cdot 2^{-x}$$

függvény (egyetlen) zérushelye szolgáltatja: $\gamma = -1 + 2/\log 2 \approx 1,885$. Az f' tehát a $(-\infty, \gamma]$ félegyenesen szigorúan monoton csökken, a $[\gamma, +\infty)$ félegyenesen szigorúan monoton nő, de mindig az x tengely alatt marad. Ezért $x > 0$-ra $f'(x)$ értéke $f'(0) = 1 - \log 2 \approx 0,307$ és $f'(\gamma) = -2^{-\gamma} \approx -0,271$ között van, így tetszőleges pozitív ξ számra $|f'(\xi)| < 0,5$.



Ha most b_i pozitív, akkor $b_{i+1} = f(b_i)$ is az, továbbá $f(1) = 1$, és a Lagrange-féle középértéktételt (lásd pl. Molnár Emil: Matematikai Versenyfeladatok gyűjteménye, 521. oldal) alkalmazva

$$|b_{i+1} - 1| = |f(b_i) - f(1)| = f'(\xi)| \cdot |b_i - 1| \leqq 0,5 \cdot |b_i - 1|,$$

(ξ az 1 és b_i közé esik, tehát pozitív), vagy általában

$$|b_{i+j} - 1| \leqq |0,5^j \cdot |b_i - 1|.$$

Ha $j \to \infty$, akkor a jobb oldal tart a nullához, de ekkor a bal oldal is tart a nullához, vagyis $\lim\limits_{j\to\infty} b_{i+j} = 1$. Összefoglalva: ha a b_n sorozatnak van pozitív tagja, a sorozat konvergens és tart 1-hez.

Abból, hogy $f(-1) = 0$ és $f(-2) = -3$, következik, hogy van olyan $-2 < \tau < -1$ érték, melyre $f(\tau) = \tau(\tau \approx -1,530)$. Az $f(x) = x$ egyenletnek 1-en és τ-n kívül nincs más gyöke. Ugyanis ellenkező esetben a Lagrange-féle középértéktételt az f függvényre a gyökhelyeken alkalmazva azt kapnánk, hogy $f'(x)$ az 1 értéket legalább két helyen felvenné, ellentétben korábbi megállapításainkkal. Így tehát ha $x < \tau$, akkor $f(x) < x$, és ha $\tau < x < 1$, akkor $f(x) > x$.

Visszatérve a feladatra, b_1 értékétől függően különböztessünk meg három esetet:

I. $b_1 = \tau$. Ekkor mindegyik $b_n = \tau$, tehát a b_n sorozat konvergens.

II. $b_1 < \tau$. Most $b_{n+1} = f(b_n) < b_n < \tau$. azaz a b_n sorozat monoton csökken. Így vagy van határértéke, vagy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

III. $b_1 > \tau$. Ha van a sorozatnak pozitív tagja, akkor egy korábbi megállapításunk szerint $\lim b_n$ létezik (és egyenlő 1-gyel). Ha nincs, akkor $\tau < b_n < f(b_n) = b_{n+1} \leqq 0$ miatt a sorozat monoton növő és felülről korlátos, tehát a határérték ebben az esetben is létezik.

Összefoglalva tehát: tetszőleges b_n-ből kiindulva vagy létezik $\lim b_n$, vagy $\lim b_n = -\infty$, vagyis a $\lim a_n$ határérték mindig létezik.