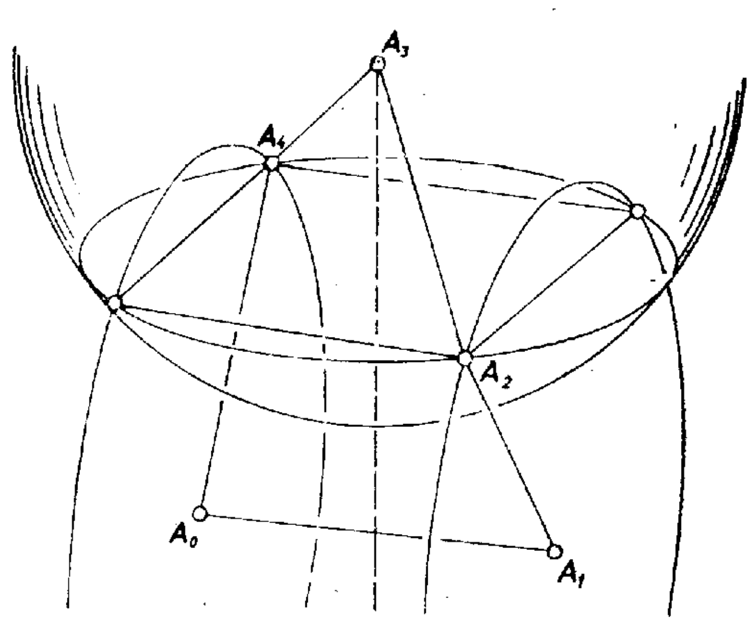
Jelöljük a keresett sokszög csúcsait A_0, A_1, $\ldots$, A_{n_1}-gyel, és legyen $A_n = A_0$, $A_{n+1} = A_1$. A mondott feltételek ekvivalensek azzal, hogy

$$A_iA_{i+1} = 1, \qquad A_iA_{i+2} = \sqrt{2}, \qquad (i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1). \tag{1}$$

Ha $n \leq 3$, (1) ellentmondásokat tartalmaz, így csak $n \geq 4$ jöhet szóba. Ha $n = 4$, a négyzet megfelel. Megmutatjuk, hogy $n = 5$ mellett (1) nem megoldható. Ha ugyanis megoldható volna, az $A_0A_1A_3$ háromszögben $A_0A_1 = 1$, $A_1A_3 = A_0A_3 = \sqrt{2}$ volna, A_2, A_4 pedig egyrészt az A_0A_1 szakasz síkjára merőleges, A_1, illetve A_0 körüli egységsugarú k_2, k_4 körön volna, másrészt e pontok az A_3 körüli egységsugarú gömbön is rajta volnának.



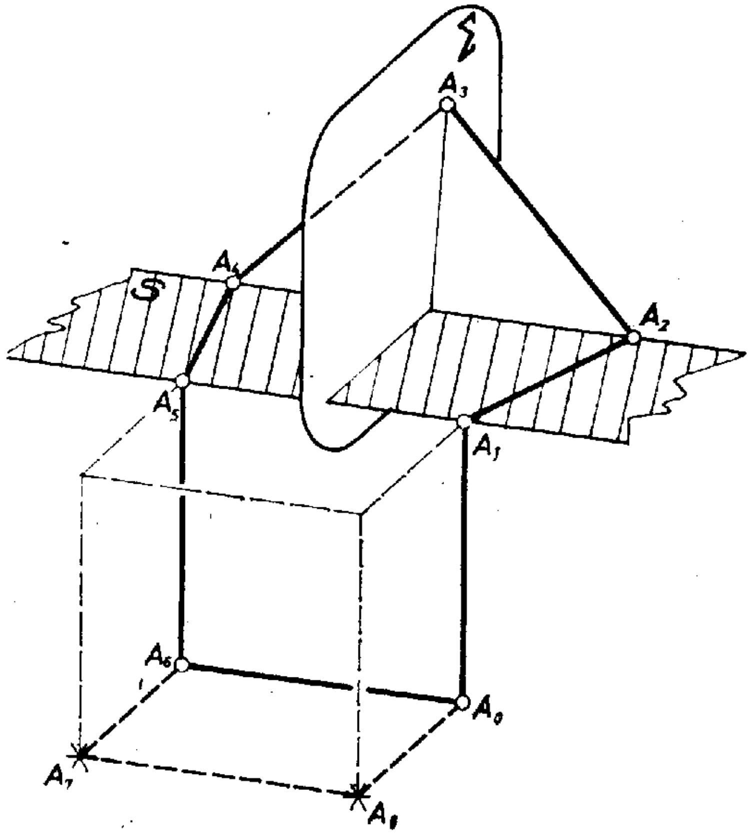
1. ábra

A gömb és k_2, k_4 metszéspontjai egy téglalapot határoznak meg, amelynek A_0A_1-gyel párhuzamos oldala egységnyi, tehát nem játszhatja az A_2A_4 szakasz szerepét, és mint az némi számolással látható, átlója sem $\sqrt{2}$ hosszú, tehát az sem lehet A_2A_4.

Ha $n = 6$, a keresett pontrendszer lehet például egy kocka két szomszédos lapjának hat csúcsa. Ha $n = 7$, a konstrukció a következő: induljunk ki az $A_1A_2A_4A_5$ négyszögből, ebben válasszuk A_2A_4-t A_1A_5-tel párhuzamosnak, A_1A_5 hosszát egységnyinek, és természetesen legyen

$$A_1A_2 = 1, \qquad A_2A_4 = \sqrt{2}, \qquad A_4A_5 = 1.$$

Jelöljük az $A_1A_2A_4A_5$ trapéz síkját S-sel, az S-re merőleges, a trapéz szimmetriatengelyén átmenő síkot $\sum$-val.



2. ábra

Mivel A_4A_5 nem merőleges $\sum$-ra, az A_5-ön átmenő, A_4A_5-re merőleges, és az ugyancsak A_5-ön átmenő $\sum$-val párhuzamos síkok metszik egymást. Metszésvonalukra mérjük fel az $A_5A_6 = 1$ szakaszt, mivel $A_1A_5 \perp \sum$, az $A_1A_5A_6$ háromszög egy négyzet fele, legyen A_0 a négyzet hiányzó csúcsa. A hiányzó A_3 pontot az $A_2A_3 = 1$, $A_1A_3 = \sqrt{2}$ feltételek $\sum$-ban már lényegében meghatározzák. Ha itt az $A_0A_1A_5A_6$ négyzetre egy kockát illesztünk, annak A_0A_6-hoz csatlakozó lapján megkerülhetjük az A_0A_6 szakaszt, tehát az oldalak száma 2-vel könnyen növelhető. Hasonlóan lépkedve tovább tetszőleges páratlan n-re megoldást kapunk, a párosokat pedig a már tárgyalt $n = 6$ esetből állíthatjuk elő.

Térben tehát az $n \leq 3$, $n = 5$ esetek kivételével minden n-hez található a kívánt tulajdonságú n-szög.

Megjegyzés. Síkban is vizsgálható a kérdés, és belátható, hogy csak 4-gyel osztható n-ek jöhetnek szóba, és ezek mindegyike realizálható is, kivéve az $n = 8$ esetet, ebben csak akkor kapunk megoldást, ha megengedjük, hogy például A_0 és A_4 azonos legyen.