

A vizsgálandó kifejezés a binomiális tételben szereplő kifejezésre emlékeztet. Ez adja az ötletet, hogy az

$$(1 + \sqrt{23})^{2n+1}$$

kifejezést vizsgáljuk. A binomiális tételt alkalmazva:

$$(1 + 2\sqrt{2})^{2n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} 2^{3k} + 2\sqrt{2} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}.$$

Az első szummát jelöljük a_n -nel, a másodikat b_n -nel. Ekkor

$$(1) \quad (1 + 2\sqrt{2})^{2n+1} = a + 2\sqrt{2}b_n, \quad (\text{ahol } a_n \text{ és } b_n \text{ egészek}).$$

Azt kell bebizonyítanunk, hogy $5 \nmid b_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Megmutatjuk, hogy az $(1 + 2\sqrt{2})^{2n+1}$ szám $x + 2\sqrt{2}y$ alakban (x, y egész) egyértelműen írható fel, ugyanis az $x + 2\sqrt{2}y = x' + 2\sqrt{2}y'$ egyenlet átrendezéséből $x - x' = (y - y')2\sqrt{2}$ következik. Ha $y - y' \neq 0$ lenne, akkor

$$\sqrt{2} = \frac{x - x'}{2(y - y')}, \quad \text{azaz}$$

$\sqrt{2}$ racionális volna. Tehát $y = y'$, s ekkor $x = x'$.

(1)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 2\sqrt{2}b_{n+1} &= (1 + 2\sqrt{2})^{2n+1} \cdot (1 + 2\sqrt{2})^2 = (a_n + b_n \cdot 2\sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2})^2 = \\ &= (9a_n + 16b_n) + 2\sqrt{2}(9b_n + 2a_n). \end{aligned}$$

Az említett egyértelműség miatt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 9a_n + 16b_n, \\ b_{n+1} &= 2a_n + 9b_n. \end{aligned}$$

Ezekből két egymás utáni helyettesítéssel:

$$(2) \quad b_{n+2} = 1593b_n + 550a_n$$

(1)-ből:

$$a_0 = b_0 = 1.$$

Rekurziós képletünkéből következik, hogy $b_1 = 11$, $b_2 = 149$ azaz $5 \nmid b_1$ és $5 \nmid b_2$. Mivel $(1593, 5) = 1$, és $5/550 \nmid a_n$, (2)-ből következik, hogy $5 \nmid b_{n+2}$ akkor és csak akkor igaz, ha $5 \nmid b_n$. Mivel azonban $5 \nmid b_1$ és $5 \nmid b_2$, ezért teljes indukció alkalmazásával következik állításunk.

Balog Antal (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)