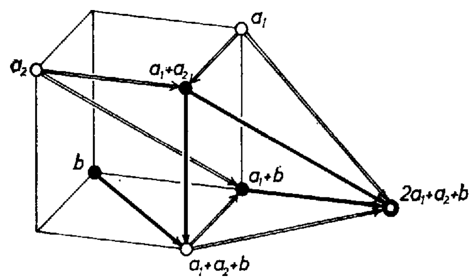
Legyen N tetszőleges szám, amely mellett a kívánt osztályozás elvégezhető, és jelöljük a kapott osztályokat A-val, B-vel. Legyen a_1, a_2 az A két különböző eleme, és b a B tetszőleges eleme, amelyre

$$b \neq a_1 + a_2, \qquad b \neq a_2 - a_1 \tag{1}$$

teljesül. Ha a $b_1 = a_1 + a_2$ számot még osztályoztuk, az csak B-hez tartozhat, hiszen két különböző A-beli szám összege. Ha az $a_3 = b_1 + b = a_1 + a_2 + b$ számot még osztályoztuk, az csak A-hoz tartozhat, hiszen két különböző B-beli összege. Ekkor a $b_2 = a_1 + b$ szám nem tartozhat A-hoz, különben az A-beli a_3 két különböző A-beli szám összege volna. Ezek szerint a $c = a_1 + a_3 = b_1 + b_2 = 2a_1 + a_2 + b$ számot már semmi esetre sem osztályozhatjuk, hiszen ez két különböző A-beli számnak is és két különböző B-beli számnak is az összege.



Ezzel beláttuk, hogy

$$N < 2a_1 + a_2 + b, \tag{2}$$

hiszen különben az a_2, a_3, b_1, b_2, c számok mindegyikét osztályoznunk kellene, és mint megmutattuk, ez lehetetlen.

Ha az $\{n, n+1, \ldots, N\}$ számok valamely kívánt tulajdonságú osztályozásánál az n, $n+1$, $n+2$ számok nem kerülnek ugyanabba az osztályba, válasszuk A-nak azt az osztályt, amelyikbe közülük kettő került, a_1-nek ezek közül a kisebbiket, a_2-nek a másikat, és b legyen a harmadik. Ha $n > 1$, ezekre teljesül (1), emiatt ilyen osztályozás csak akkor lehetséges, ha N-re teljesül a (2)-nek megfelelő

$$N < 2a_1 + a_2 + b \leq n + 2(n+1) + (n+2) = 4n + 4 \tag{3}$$

egyenlőtlenség. Ha $n = 1$, és $b = 1$, akkor (2) szerint $N < 8$; ha $b = 2$, akkor az $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ választással kapjuk (2)-ből, hogy $N < 9$; ha pedig $b = 3$, akkor 1, 2 A-beli, és két újabb esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a 4 A-hoz tartozik-e vagy B-hez. Ha $4 \in A$, akkor $5 \in B$, $6 \in B$, $7 \in B$, $8 \in A$ és a 9 már nem osztályozható. Ha $4 \in B$, akkor $7 \in A$, $6 \in B$, $5 \in B$, és már a 8 sem osztályozható. Tehát $n = 1$ mellett (3) helyett csak a kevesebbet mondó

$$N \leq 4n + 4 \tag{3*}$$

állítható.

Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor az n, $n+1$, $n+2$ számok ugyanabba az osztályba kerülnek. Válasszuk ebben az esetben az n-t tartalmazó osztályt A-nak. Mivel $n \in A$, $n+1 \in A$, a $2n+1$ szám csak B-beli lehet, így alkalmazhatjuk (2)-t az $a_1 = n$, $a_2 = n+2$, $n = 2n+1$ helyettesítéssel:

$$N < 2n + (n+2) + 2n + 1 = 5n + 3. \tag{4}$$

Ha $n = 1$, akkor (4) szigorúbb (3*)-nál, tehát a legnagyobb N-et a már vizsgált

$$A = \{1, 2, 4, 8\}, \qquad B = \{3, 5, 6, 7\}$$

osztályozás biztosítja. Ha $n > 1$, akkor (3) szigorúbb (4)-nél, tehát N legnagyobb szóba jöhető értéke

$$N_{\max} = 5n + 2. \tag{5}$$

Ez el is érthető, ha B-nek a

$$B = \{2n+1,\ 2n+2,\ \ldots,\ 4n+2\}$$

halmazt választjuk, A-nak pedig ennek komplementerét:

$$A = \{n,\ n+1,\ \ldots,\ 2n,\ 4n+3,\ 4n+4,\ \ldots,\ 5n+2\}.$$

Kaptuk tehát, hogy N legnagyobb értékét (5) adja meg, kivéve az $n = 1$ esetet, amikor $N_{\max} = 8$.

Seress Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Az, hogy a kívánt osztályozás nem végezhető el tetszőlegesen nagy N-re, már abból látszik, hogy ha a_1, $a_2 \in A$, $b \in B$, akkor $a_1 + b \in B$. Ha ugyanis most b mellé veszünk fel egy $b_1 \in B$ elemet, azt is beláthatjuk, hogy $a_1 + b \in A$, szóval a baj ott kezdődik, hogy nem lehet eldönteni, hogy egy A-beli és egy B-beli elem összege hova tartozzon.

\epsfbox{1975-155-1.eps}{*P. 221.*}