I megoldás. Legyen a keresett polinom

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + \alpha_n, \tag{1}$$

ha $n > 0$, ennek deriváltja

$$p'(x) = n\ a_0 x^{n-1} + (n-1)\ a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}, \tag{2}$$

ha pedig $n = 0$, akkor $p'(x)$ azonosan 0. Olyan $p(x)$-et keresünk, amelyhez található olyan $q(x)$ polinom, hogy

$$p(x) = q(x)\, p'(x). \tag{3}$$

Ebből $n = 0$ mellett $p(x) = 0$ következik, ami azonban nem megoldás, mert 0-val nem lehet osztani. A továbbiakban feltesszük, hogy $n > 0$, ekkor azt is feltehetjük, hogy $\alpha_n \neq 0$, vagyis p pontosan n-edfokú. Ekkor p' $(n-1)$-edfokú, tehát (3) csak elsőfokú q-val teljesülhet:

$$q(x) = bx + c. \tag{4}$$

Ezt (3)-ba helyettesítve, és felhasználva, hogy két polinom azonossága a megfelelő fokú tagok együtthatóinak az egyenlőségével ekvivalens, a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned}
&a_0 = nba_0\\
&a_1 = (n-1)ba_1 + nca_0\\
&\vdots\\
&a_k = (n-k)ba_k + (n-k+1)ca_{k-1}\\
&\vdots\\
&a_n = 0 + ca_{n-1}
\end{aligned} \tag{5}$$

Ezekből egyrészt $nb = 1$, másrészt

$$a_k = \frac{n-k+1}{k}\, nca_{k-1}, \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

következik. Ez utóbbiból némi számolással kapjuk, hogy

$$a_k = \binom{n}{k}(nc)^k a_0,$$

vagyis

$$p(x) = a_0(x+d)^n, \tag{6}$$

ahol $d = nc$. Emellett

$$p'(x) = na_0(x+d)^{n-1},$$

ami valóban eleget tesz (3)-nak, ha q-nak a

$$q(x) = \frac{1}{n}\,(x-d)$$

polinomot választjuk. Tehát (6) a feladat összes megoldását megadja.

Strommer Pál (Budapest, Piarista Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Az I. megoldásban beláttuk, hogy

$$p(x) = \frac{1}{n}\,(x+d)p'(x) \tag{7}$$

vagyis p osztható $(x+d)$-vel. Legyen k az $(x+d)$ legmagasabb fokú hatványa, amivel $p(x)$ osztható:

$$p(x) = (x+d)^k h(x) \tag{8}$$

ahol h már nem osztható $(x+d)$-vel, azaz $h(-d) \neq 0$. Ekkor

$$p'(x) = k(x+d)^{k-1}h(x) + (x+d)^k h'(x),$$

amit (8)-cal együtt (7)-be helyettesítve, majd $(x+d)^k$-nel osztva kapjuk, hogy

$$h(x) = \frac{k}{n}\, h(x) + (x+d)h'(x).$$

Ebbe az $x = (-d)$ számot helyettesítve $h(-d) \neq 0$ miatt kapjuk, hogy $k = n$, vagyis $h(x)$ konstans. Ezek mellett (8) ekvivalens (6)-tal, tehát (6) adja meg az összes megoldást.

III. megoldás. Ha (3)-ban q nem azonosan 0, (3) szerint $\dfrac{p'}{p} = \dfrac{1}{q}$. Mivel itt $\dfrac{p'}{p}$ a $\log p(x)$ függvény deriváltja, az $\dfrac{1}{q} = \dfrac{n}{x+d}$ függvény pedig a $\log{(x+d)^n}$ függvény deriváltja, ebből következik hogy a $\log{(x+d)^n}$ és $\log{(x+d)^n}$ függvények különbsége állandó:

$$\log p(x) - \log{(x+d)^n} = A,$$

vagyis

$$p(x) = B(x+d)^n,$$

ahol $A = \log B$, ismét (6)-ot kapjuk.