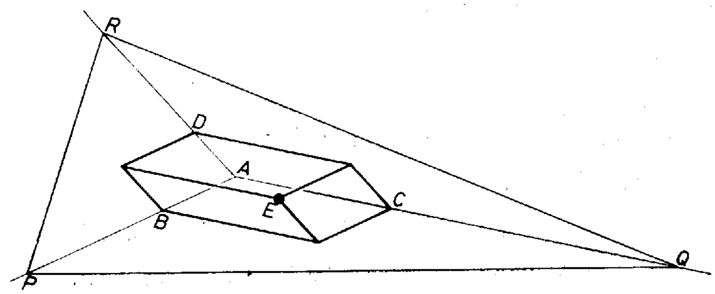

Az iskolai függvénytáblázat képlettárában megtalálható összefüggés szerint az $APQR$ tetraéder V térfogata

$$V = \frac{1}{6} \cdot AP \cdot AR \cdot AQ \cdot \sin(AP, AQ)\sphericalangle \cdot \sin\delta,$$

ahol δ az APQ sík és az AR él hajlásszöge. Mivel $(AP, AQ)\sphericalangle$ és δ adottak, V akkor és csak akkor minimális, ha $AP \cdot AR \cdot AQ$ minimális.

A Geometriai Feladatok Gyűjteménye I. kötetének 1991. feladatát esetünkre alkalmazva:

$$\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} + \frac{AD}{AR} = 1. \tag{1}$$

A számtani és mértani közepek közti összefüggés alapján:

$$\frac{1}{3} = \frac{\dfrac{AB}{AP} + \dfrac{AC}{AQ} + \dfrac{AD}{AR}}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AP \cdot AQ \cdot AR}}, \tag{2}$$

ahonnan

$$AP \cdot AQ \cdot AR \geqq 27\ AB \cdot AC \cdot AD. \tag{3}$$

(2) és (3) ekvivalensek, (3) jobb oldala állandó, ezért $AP \cdot AQ \cdot AR$, és így V is, akkor és csak akkor maximális, ha (2)-ben is egyenlőség van, azaz ha

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{AC}{AR} = \frac{1}{3},$$

hiszen összegük (1) szerint 1. Megjegyezzük, hogy (1) azt is biztosítja, hogy az $AP = 3AB$, $AQ = 3AC$, $AR = 3AD$ összefüggéseknek megfelelő P, Q, R pontok, valamint E egy síkban legyenek.

Gombos János (Miskolc, Földes F. Gimn.)