Csoportosítsuk a dobáseredményeket hármasával: így nyolc lehetséges eredményünk lesz, és mindegyiknek 1/8 a valószínűsége. Annak $(7/8)^n$ a valószínűsége, hogy n ilyen hármas között nincs FFF, hiszen egy ilyen hármasnak 7/8 a valószínűsége, és a hármasok függetlenek. Ennél kisebb a valószínűsége annak, hogy az első $3n$ dobásban nincs FFF, hiszen most az előbbi csoportosítás szerint kettévágott hármas blokkok között is lehet valamelyik FFF. Tehát 0-hoz tart annak a valószínűsége, hogy az első $3n$ dobás között ne legyen se FFF, se FIF, így a dobássorozat biztosan véget ér véges sok lépésben.

Jelöljük A-va1 azt az eseményt, hogy FFF adódik előbb, mint FIF, és legyen I_j az az esemény, hogy a j-ik dobás írás, F_j pedig az, hogy a j-ik fej. Az I_1, $F_1F_2F_3$, $F_1F_2I_3$, $F_1I_2F_3$, $F_1I_2I_3$ események ún. teljes eseményrendszert alkotnak (közülük mindig csak egy és csakis egy következik be), és A-nak ezek bekövetkezése mellett rendre a következő feltételes valószínűsége:

$P(A|I_1) = P(A)$, hiszen az első írásdobás után változatlan körülmények között újrakezdődik a verseny az FFF és FIF között;

$P(A|F_1F_2F_3) = 1$, hiszen most az FFF következett be először;

$P(A|F_1F_2I_3) = \frac{1}{2} \cdot P(A)$, hiszen ha $F_1F_2I_3$ után F_4 jön, az FIF következik be először, és csak ha I_4 jön, akkor kezdődik újra a verseny az FFF, FIF blokkok között;

$P(A|F_1I_2F_3) = 0$, hiszen most a FIF következett be először;

$P(A|F_1I_2I_3) = P(A)$ ugyanúgy, mint $P(A|I_1)$ esetében.

A teljes valószínűség tétele szerint, ha ezeket a feltételes valószínűségeket megszorozzuk a feltétel valószínűségével, és az eredményeket összeadjuk, eredményül $P(A)$-t kapjuk:

$$\frac{1}{2} \cdot P(A) + \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot P(A) + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot P(A) = P(A),$$

ami csak $P(A) = \frac{2}{5}$ mellett teljesülhet. Tehát $\frac{2}{5}$ annak a valószínűsége, hogy FFF jön előbb, mint FIF.

Lelkes András

Megjegyzés. Az eredmény meglepő, hiszen felületesen azt várhatnánk, hogy a két esemény szerepe felcserélhető, és emiatt $P(A) = \frac{1}{2}$. Hogy ez még sincs így, annak éppen az a magyarázata, hogy a két esemény nem egyenrangú, a három fejből álló blokk nehezebben alakul ki, mint a FIF dobáseredmény.