I. Megoldás. Először belátjuk, hogy az A pont hozzátartozik a mértani helyhez, vagyis hogy

$$AB^2 \cdot \sin 2\beta + AC^2 \cdot \sin 2\gamma = 4t.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$AB^2 \cdot 2\sin\beta \cdot \cos\beta + AC^2 \cdot 2\sin\gamma\cos\gamma = 4 \cdot \frac{AB \cdot AC \sin\alpha}{2},$$

$$\frac{AB}{AC} \cdot \sin\beta\cos\beta + \frac{AC}{AB}\sin\gamma\cos\gamma = \sin\alpha,$$

$$\sin\gamma\cos\beta + \cos\gamma\sin\beta = \sin\alpha,$$

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha,$$

amiről viszont tudjuk, hogy érvényes, hiszen $\alpha = 180^\circ - (\beta+\gamma)$.

Hasonlóan kaphatjuk, hogy B és C pont szintén hozzátartozik a mértani helyhez.

A feladat további részét koordinátageometriai úton oldjuk meg.

Legyenek a háromszög csúcsai A $(a_1;a_2)$, B $(b_1;b_2)$, C $(c_1;c_2)$ a P pont koordinátái pedig x és y. A feltétel szerint tehát:

(1) $$\sin 2\alpha\left[(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right] + \sin 2\beta\left[(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2\right] + \sin 2\gamma\left[(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2\right] = 4t.$$

Mivel α, β, γ és t állandók, ez az egyenlet ilyen alakra hozható (ekvivalens átalakítások után):

(2) $$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0.$$

Tudjuk, hogy a (2) egyenletet vagy csak egy pont elégíti ki, vagy egy kör pontjai elégítik ki, vagy pedig semmilyen pont nem elégíti ki.

Mivel azonban A, B és C pontok kielégítik (2)-t, ezért (2) egy kör egyenlete.

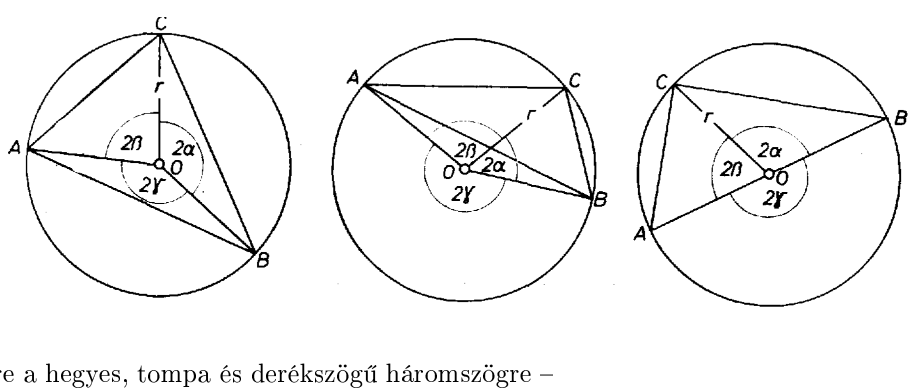
(1) és (2) ekvivalenciája miatt tehát a keresett P pontok mértani helye a háromszög köré írt kör.

Páles Zsolt (Sátoraljaújhely, Kossuth L. Gimn.)

II. Megoldás. Bármilyen ABC háromszögre érvényes a

(3) $$4T = 2r^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

összefüggés.



Ugyanis – rendre a hegyes, tompa és derékszögű háromszögre –

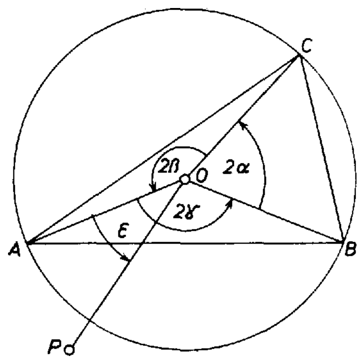
$$T = T(AOB) + T(BOC) + T(COA) = \frac{1}{2}r^2\sin 2\beta + \frac{1}{2}r^2\sin 2\gamma + \frac{1}{2}r^2\sin\alpha,$$

$$T = T(AOC) + T(COB) - T(AOB) = \frac{1}{2}r^2\sin 2\beta + \frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha - \frac{1}{2}r^2\sin(360^\circ - 2\gamma),$$

$$T = T(AOC) + T(BOC) = \frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha + \frac{1}{2}r^2\sin 2\beta.$$

Ezek mindegyike viszont egyenlő az elsővel, hiszen $\sin(360^\circ - 2\alpha) = -\sin 2\alpha$ és $\sin 2\cdot 90^\circ = 0$. Az első összefüggésből (3) nyilvánvaló.

Legyen $PO = d$, $AOP\sphericalangle = \varepsilon$, $AOB\sphericalangle = 2\gamma$, $BOC\sphericalangle = 2\alpha$ és $COA\sphericalangle = 2\beta$ a szögek mindegyike irányított.



Ekkor a

$$\begin{aligned} PA^2 &= r^2 + d^2 - 2rd\,\cos\varepsilon, \\ PB^2 &= r^2 + d^2 - 2rd\,\cos(2\gamma - \varepsilon), \\ PC^2 &= r^2 + d^2 - 2rd\,\cos(2\beta + \varepsilon) \end{aligned}$$

összefüggések alapján:

$$PA^2 \cdot \sin 2\alpha + PB^2 \sin 2\beta + PC^2 \sin 2\gamma =$$
$$= (r^2 + d^2)(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) - 2rd(\cos\varepsilon \sin 2\alpha + \cos(2\gamma - \varepsilon)\sin 2\beta + \cos(2\beta + \varepsilon)\sin 2\gamma),$$

$2rd$ szorzótényezőjét alakítva:

$$\cos\varepsilon \sin 2\alpha + \cos 2\gamma \cos\varepsilon \sin 2\beta + \sin 2\gamma \sin\varepsilon \sin 2\beta + \cos 2\beta \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin 2\gamma -$$
$$\sin 2\beta \sin\varepsilon \cdot \sin 2\gamma = \cos\varepsilon(\sin 2\alpha + \cos 2\gamma \sin 2\beta + \cos 2\beta \sin 2\gamma) =$$
$$\cos\varepsilon\big(\sin 2\alpha + \sin(2\beta + 2\gamma)\big) = \cos\varepsilon\big(\sin 2\alpha + \sin(360^\circ - 2\alpha)\big) = \cos\varepsilon(\sin 2\alpha - \sin 2\alpha) = 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$PA^2 \sin 2\alpha + PB^2 \sin 2\beta + PC^2 \sin 2\gamma = (r^2 + d^2)(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma),$$

(a sík minden P pontjára). Ezt és (3)-at összevetve, a kérdés így tehető fel: mi azon P pontok mértani helye, amelyekre $(r^2 + d^2)$ $(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 2r^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$, vagyis:

$$(r^2 - d^2)(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 0.$$

Mivel $\sin\, 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \neq 0$, ezért $r^2 - d^2 = 0$, vagyis a mértani hely a háromszög köré írható kör. ($\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$ azért nem lehet nulla, mert $4T = 2r^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + + \sin 2\gamma) > 0$).

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak Gimn.)