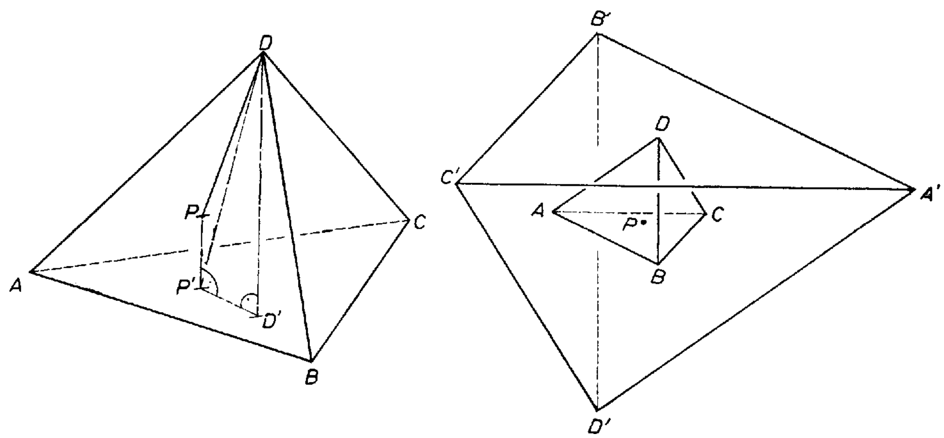
I. megoldás. Az $ABCD$ tetraéder térfogatát V_{ABCD}-vel jelöljük. Analóg jelölésmódot vezetünk be más tetraéderek térfogatára is.

Vetítsük D-t, ill. P-t az ABC háromszög síkjára, a vetületek legyenek P', ill. D'.



A háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$DP' \leq DP + PP',$$

továbbá, mivel DD' merőleges az ABC háromszög síkjára: $DP' \geq DD'$. A fentiek miatt

$$DD' \leq DP + PP'.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $T_{ABC}/3$-mal megszorozva, figyelembe véve a térfogatképletet, a

$$V_{ABCD} \leq V_{ABCP} + \frac{1}{3} T_{ABC} \cdot PD$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Hasonló módszerrel kaphatjuk meg a

$$V_{ABCD} \leq V_{ABDP} + \frac{1}{3} T_{ABD} \cdot PC,$$
$$V_{ABCD} \leq V_{ACDP} + \frac{1}{3} T_{ACD} \cdot PB,$$
$$V_{ABCD} \leq V_{BCDP} + \frac{1}{3} T_{BCD} \cdot PA$$

egyenlőtlenségeket. Mivel P a tetraéder belsejében van: $V_{ABCD} = V_{ABCP} + V_{ABDP} + V_{ACDP} + V_{BCDP}$. Ezt figyelembe véve a négy egyenlőtlenség összeadásával a

$$4V_{ABCD} \leq V_{ABCD} + \frac{1}{3}(T_{ABC} \cdot PD + T_{ABD} \cdot PC + T_{ACD} \cdot PB + T_{BCD} \cdot PA)$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Ebből átrendezéssel adódik az állítás.

Belátható, hogy egyenlőség akkor és csak akkor lehetséges, ha a tetraédernek van magasságpontja és az P-vel egybeesik.

Czompó József (Győr, Révai M. Gimn.)

II. megoldás. Tekintsük azt a tetraédert, amelynek lapjai párhuzamosak az eredeti $ABCD$ tetraéder lapjaival és átmennek a szemben levő csúcson. Ez a tetraéder hasonló az eredetihez, és a hasonlóság aránya 1:3. Ezért

(1) $$V' = 27V; \quad T_{B'C'D'} = 9T_{BCD}; \quad T_{A'B'C'} = 9T_{ABC}; \quad T_{A'B'D'} = 9T_{ABD}; \quad T_{A'C'D'} = 9T_{ACD}.$$

P-nek az $A'B'C'$, $A'C'D'$, $A'B'D'$, $B'C'D'$ lapoktól mért távolságát jelölje m_D, m_B, m_C, ill. m_A. Nyilván

(2) $$PA \geq m_A,\ PB \geq m_B,\ PC \geq m_C,\ PD \geq m_D,$$

emiatt

$$V' \leq \frac{1}{3} T_{A'B'C'} \cdot PD + T_{A'B'D'} \cdot PC + T_{A'C'D'} \cdot PB + T_{B'C'D'} \cdot PA.$$

(1)-et behelyettesítve

$$27V \leq \frac{1}{3}(9T_{ABC} \cdot PD + 9T_{ABD} \cdot PC + 9T_{ACD} \cdot PB + 9T_{BCD} \cdot PA).$$

Ennek átrendezése után bizonyítandó állításunkat kapjuk.

(2)-ből az is kiderül, hogy egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a tetraédernek van magasságpontja és éppen P az.