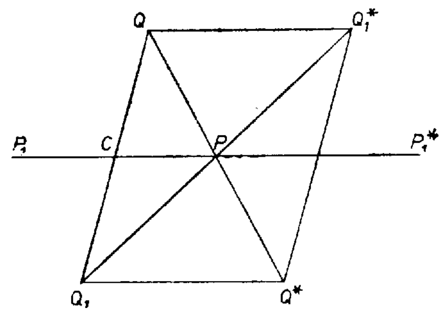
Jelöljük valamely H ponthalmaz különböző pontpárjai által meghatározott egyenesek halmazát $E(H)$-val. Ha egy H ponthalmaz centrálszimmetrikus C centrummal, akkor minden C-n át nem menő, $E(H)$-beli e egyeneshez található tőle különböző, vele párhuzamos, $E(H)$-beli egyenes, ilyen például e-nek C-re vonatkozó tükörképe (ami nyilván $E(H)$-beli). Gondot csak a C-n átmenő egyenesek okozhatnak. Ha H nem csak ugyanazon az egyenesen levő pontokat tartalmaz, ezen a következő módszerrel segíthetünk. Vegyük H tetszőleges C-től különböző P pontját (itt, és a továbbiakban közömbös lesz, hogy C H-hoz tartozik-e vagy sem), és tükrözzük H-t P-re. A H halmaz P-re vonatkozó H^* tükörképéből és H-ból álló H_p halmazban már a P centrumon átmenő egyenesek sem okoznak gondot.

Valóban, legyen Q tetszőleges pontja H-nak, amelyik nincs a PC egyenesen. A PQ egyenessel párhuzamos, tőle különböző egyenest már $E(H)$-ban találtunk: ez a P, Q pontok C-re vonatkozó P_1, Q_1 tükörképén átmenő egyenes. (Hasonló a helyzet, ha Q-t H^*-ból választjuk, ekkor már $E(H^*)$-ban van PQ-val párhuzamos, tőle különböző egyenes.) Azt kell még belátnunk, hogy a PC egyeneshez található $E(H_p)$-ben vele párhuzamos, tőle különböző egyenes. Ilyen egyenest kapunk tetszőleges nem PC-n levő H-beli Q-ból kiindulva: ha ismét Q_1 jelöli Q-nak C-re vonatkozó tükörképét, és Q^* a P-re vonatkozót, a Q_1Q^* egyenes párhuzamos PC-vel, és nem azonos vele.



A feladatban feltett kérdésre tehát igenlő a válasz: ilyet kapunk például, ha tetszőleges térbeli (nem egy síkban levő) centrálszimmetrikus H halmazt tükrözünk valamelyik, centrumától különböző pontjára, és vesszük az eredeti, és a tükrözésből származó pontok egyesítését.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Legyenek P_1, $P_2, \ldots, P_k$, C tetszőleges térbeli (nem egy síkban levő) pontok ($k \geqq 3$), jelöljük P_i C-re vonatkozó tükörképét P_{i+k}-val ($i = 1, 2, \ldots, k$) és P_i-nek P_{2k}-ra vonatkozó tükörképét P_i^*-gal ($i = 1, 2, \ldots, 2k-1$). Akkor az $M = \{P_i, P_i^*\}$, ($i = 1, 2, \ldots, 2k-1$) ponthalmaznak megvan a feladatban mondott tulajdonsága. A kapott M pontrendszerhez $4k-2$ pont tartozik, ennek legkisebb értéke 10. Megfelelő pontrendszert kapunk, ha M-hez hozzávesszük P_{2k}-t, vagy C-t és C-nek P_{2k}-ra vonatkozó tükörképét, vagy akár mindhárom pontot. Ennek megfelelően $4k-1$, $4k$, és $4k+1$ elemű ponthalmazt kapunk, tehát minden $n \geqq 10$ természetes számhoz található n-elemű megfelelő ponthalmaz.

2. Ha H_1 és H_2, megfelelő centrálszimmetrikus halmazok közös C centrummal, akkor a halmazok egyesítéséből álló H halmaz is megfelelő (ennek belátását az olvasóra hagyjuk). Könnyen látható, hagy tetszőleges $k \geqq 3$ mellett a $2k$ csúcsú szabályos sokszög csúcsainak a halmaza megfelelő (csak éppen nem térbeli) Ha tehát a térben különböző, egy ponton átmenő síkokban olyan páros csúcsú szabályos sokszögeket veszünk fel, amelyek centruma a síkok közös pontja, ezek csúcsainak az egyesítése már a feladat összes követelményét kielégíti. Így származtatható például a kocka élfelezőpontjainak a halmaza, tehát ez a halmaz is megfelelő.

3. Érdekes kérdéseknek látszanak a következők. Van-e 10-nél kevesebb pontból álló megfelelő halmaz? Igaz-e, hogy minden megfelelő halmaz centrálszimmetrikus? Származtathatjuk-e az összes megfelelő halmazt a fenti módszerek kombinálásával?