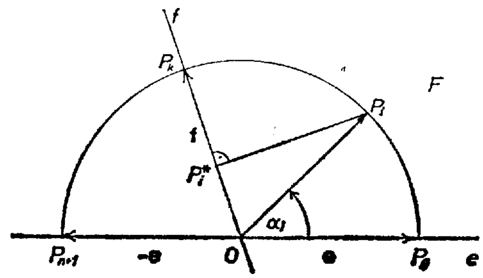
$$|\overrightarrow{OP}_1+\overrightarrow{OP}_2+\ldots+\overrightarrow{OP}_n|\geqq 1, \tag{1}$$

Jelöljük F-fel azt az e által határolt félsíkot, amelyben a P_i pontok vannak, és válasszuk az e-vel megegyező állású egységvektorok közül $\mathbf{e}$-nek azt, amelyiket $180°$-nál kisebb pozitív irányú forgatás visz F-be.



Legyen P_0 az a pont, melyre $\overrightarrow{OP_0}=\mathbf{e}$, és P_{n+1} a P_0 O-ra vonatkozó tükörképe. Jelöljük az $\mathbf{e}$-t OP_i-be vivő forgatást α_i-vel, és tegyük fel, hogy a P_i pontok úgy vannak megszámozva, hogy az α_i sorozat monoton nő:

$$0\le\alpha_0\le\alpha_1\le\ldots\le\alpha_n\le\alpha_{n+1}=180°. \tag{2}$$

(Ha ez nem teljesülne, változtassuk meg a P_i pontok számozását úgy, hogy az új számozás mellett már teljesüljön (2). Ezt mindig megtehetjük, hiszen ez a módosítás a (1)-ben szereplő összeget változatlanul hagyja.)

Feltevésünk szerint n páratlan, mondjuk $n=2k-1$. Jelöljük f-fel az OP_k egyenest, $\mathbf{f}$-fel az $\overrightarrow{OP_k}$ vektort, és P_i^*-gal a P_i pont f-en levő vetületét. Azt fogjuk belátni, hogy

$$|\overrightarrow{OP_1^*}+\ldots+\overrightarrow{OP_n^*}|\ge 1, \tag{3}$$

ebből már következik (1), hiszen a $\overrightarrow{P^*P_i}$, vektorok merőlegesek $\mathbf{f}$-re, így $\mathbf{f}$-re merőleges az összegük is, és Pithagorasz tétele szerint

$$\begin{gathered}|\overrightarrow{OP_1}+\ldots+\overrightarrow{OP_n}|^2=|\overrightarrow{OP_1^*}+\ldots+\overrightarrow{OP_n^*}|^2+|\overrightarrow{P_1^*P_1}+\ldots+\overrightarrow{P_n^*P_n}|^2\ge\\ \ge|\overrightarrow{OP_1^*}+\ldots+\overrightarrow{OP_n^*}|^2.\end{gathered}$$

Mivel $\overrightarrow{OP_i^*}$ egyállású $\mathbf{f}$-fel, van olyan λ_i szakasz, amelyre $\overrightarrow{OP_i^*}=\lambda_i\mathbf{f}$. Elég belátnunk, hogy

$$\lambda_1+\ldots+\lambda_n\ge 1, \tag{4}$$

ami valóban igaz, mert $\lambda_i=\cos(\alpha_k-\alpha_i)$, és emiatt

$$\lambda_i\ge\lambda_0=\cos\alpha_k,\qquad\text{ha}\qquad 1\le i<k; \tag{5}$$

$$\lambda_i\ge\lambda_{n+1}=-\cos\alpha_k,\qquad\text{ha}\qquad k<i\le n, \tag{6}$$

hiszen $1\le i<k$ mellett $0\le\alpha_k-\alpha_i\le\alpha_k\le 180°$, és a $0\le x\le 180°$ szakaszon $\cos x$ monoton fogy, ha pedig $k<i\le n$ akkor $-180°\le\alpha_k-180°\le\alpha_k-\alpha_i\le 0$, és a $-180°\le x\le 0$ szakaszon $\cos x$ monoton nő. Mármost (5) szerint

$$\lambda_1+\ldots+\lambda_{k-1}\ge(k-1)\lambda_0, \tag{7}$$

és (6). szerint

$$\lambda_{k+1}+\ldots+\lambda_n\ge(k-1)\lambda_{n+1}, \tag{8}$$

tehát

$$(\lambda_1+\ldots+\lambda_{k-1})+(\lambda_{k+1}+\ldots+\lambda_n)\ge(k-1)(\lambda_0+\lambda_{n+1})=0, \tag{9}$$

amiből következik (4), hiszen $\lambda_k=1$.

Megjegyzés. Ha $n=1$, (1) és (4) nyilvánvaló, az (5)–(9) állítások pedig formálisan ugyan helyesek, de semmitmondóak. (7)-ből és (8)-ból kiolvasható, hogy (1)-ben az egyenlőség jele akkor és csakis akkor teljesül, ha $P_1=\ldots=P_{k-1}=P_0$ és $P_{k+1}=\ldots=P_n=P_{n+1}$ (és P_k tetszőleges).