Teljes indukcióval belátjuk, hogy az a_n sorozat monoton nő. A rekurziós képletből világos, hogy az a_n szám egy felső becslése a_{n+1}-re alsó becslést von maga után. Nem várható ezért, hogy $a_n \leqq a_{n+1}$-ből $a_{n+1} \leqq a_{n+2}$-re következtethetünk. Célszerű tehát az indukcióval bizonyítandó állítást $a_{n-1} \leqq a_n \leqq a_{n+1}$ alakban megfogalmazni. Közvetlen számolással $1 = a_1 \leqq 2 = a_2 \leqq 2 = a_3$, azaz $n = 2$ esetén az állítás teljesül.

Tegyük fel, hogy valamely rögzített n-re $a_{n-1} \leqq a_n \leqq a_{n+1}$ és mutassuk meg, hogy ebből $a_n \leqq a_{n+1} \leqq a_{n+2}$ következik. $a_n \leqq a_{n+1}$ az indukciós feltevés szerint fennáll, így az $a_{n+1} \leqq a_{n+2}$ állítást kell igazolni.

$$a_{n+2} = 1 + \frac{n+1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{1 + \dfrac{n}{a_n}} \geqq 1 + \frac{n+1}{1 + \dfrac{n-1+1}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{n+1}{a_n + \dfrac{1}{a_{n-1}}}.$$

Az $a_n \geqq 1$ becslés nyilvánvalóan fennáll minden n-re, így

$$1 - \frac{1}{a_{n-1}} \geqq 0, \qquad \text{azaz} \qquad a_n = 1 + \frac{n-1}{a_{n-1}} \geqq \frac{n}{a_{n-1}}.$$

Az $a_n \geqq \dfrac{n}{a_{n-1}}$ egyenlőtlenségből azonnal következik $\dfrac{n+1}{a_n + \dfrac{1}{a_{n-1}}} \geqq \dfrac{n}{a_n}$, azaz $a_{n+2} \geqq 1 + \dfrac{n}{a_n} = a_{n+1}$, és ezzel az indukciós bizonyítás kész.

Mivel a definíció szerint $a_n \cdot a_{n+1} = a_n + n$, a most igazolt monotonitás szerint $a_n^2 \leqq a_n + n$, azaz

$$\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq n + \frac{1}{4}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Másrészt

$$\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{a_{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{n-1}{a_{n-1}}\left(1 + \frac{n-1}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{n-1}{a_{n-1}}a_n \geqq \frac{1}{4} + n - 1 = n - \frac{3}{4},$$

hiszen

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geqq 1.$$

Gyökvonással a

$$\sqrt{n - \frac{3}{4}} \leqq a_n - \frac{1}{2} \leqq \sqrt{n + \frac{1}{4}}$$

egyenlőtlenségekre jutunk, ahonnan

$$\frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} - \sqrt{n} \leqq a_n - \sqrt{n} \leqq \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}} + \sqrt{n}.$$

Tetszőleges c konstans esetén

$$\sqrt{n+c} - \sqrt{n} = \frac{c}{\sqrt{n+c} + \sqrt{n}} \to 0, \qquad \text{ha} \qquad n \to \infty,$$

azaz $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - \sqrt{n}) = \dfrac{1}{2}$.

Páles Zsolt (Sátoraljaújhely, Kossuth L. (Gimn.)