Egy N természetes szám tízes számrendszerben kiírva akkor és csak akkor kezdődik az adott 1, 9, 7, 3 jegyekkel, ha alkalmas k mellett

$$1973 \leq \frac{N}{10^k} < 1974$$

(k jelenti az 1973 után álló jegyek számát.) Eszerint ha n egy adott természetes szám, az $\frac{n^j}{10^k}$ alakú törtek között olyat kell találnunk, amelyik 1973 és 1974 közé esik. 10-es alapú logaritmust használva feltételünket

$$\lg 1973 \leq j \lg n - k < \lg 1974$$

alakba írhatjuk. Általánosabban, igazoljuk a következő állítást: tetszőleges $0 < A < B$ számokhoz és tetszőleges $\alpha > 0$ irracionális számhoz található olyan k és j természetes szám, hogy

$$A \leq j\alpha - k < B \qquad \text{teljesül.}$$

Válasszunk egy M egész számot, amelyre $\frac{1}{M} < B - A$. Ha sikerül találni olyan q egész számot, amelyre $0 < q\alpha - [q\alpha] < \frac{1}{M}$, akkor a $(q\alpha - [q\alpha])$ szám egy egész többszöröse biztosan az $(A,\ B)$ intervallumba esik és így állításunkat is beláttuk.

Vegyünk fel egy egységnyi hosszúságú K körvonalat és jelöljünk ki rajta egy $P(0)$ kezdőpontot. Ezután minden $x \geq 0$ valós számhoz rendeljük hozzá a K körvonal $P(x)$ pontját úgy, hogy $P(0)$-ból kiindulva pozitív irányban x hosszúságú ívet mérünk a körre és ennek végpontja $P(x)$. Világos, hogy $P(x) = P(y)$ pontosan akkor teljesül, ha $x - y$ egész szám. Eszerint a $P(q\alpha) = P(q\alpha - [q\alpha])$ pontok $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ mind különbözők, hiszen a irracionalitása miatt $q_1\alpha - q_2\alpha$ nem lehet egész $q_1 \neq q_2$ esetén. Körünket a $\overline{P(0)\,P\left(\frac{1}{M}\right)}$, $\overline{P\left(\frac{1}{M}\right)\,P\left(\frac{2}{M}\right)}$, $\ldots$, $\overline{P\left(1 - \frac{1}{M}\right)\,P(0)}$ ívekkel osszuk M egyenlő részre. Az $M + 1$ darab $P(\alpha)$, $P(2\alpha)$, $\ldots$, $P\big((M+1)\alpha\big)$ pont közül van kettő, amely ugyanarra az ívre esik, azaz mondjuk $P(q_1\alpha)$ és $P(q_2\alpha)$ távolsága a körön mérve $\frac{1}{M}$-nél kisebb. Legyen $q_1 < q_2$, $q_2 = q_1 + d$. A $P(q_1\alpha + d\alpha)$ pont $P(q_1\alpha)$-hoz viszonyítva ugyanúgy helyezkedik el, mint $P(d\alpha)$ a $P(0)$-hoz képest, azaz $P(d\alpha)$ vagy a $\overline{P(0)P\left(\frac{1}{M}\right)}$ vagy a $\overline{P\left(1 - \frac{1}{M}\right)P(0)}$ íven van. Az első esetben készen vagyunk, a másodikban az előző gondolatmenet megismétlésével vegyük észre, hogy $P(d\alpha)$, $P(2d\alpha)$, $\ldots$, $P(kd\alpha)$ egymás után ugyanúgy helyezkedik el, mint $P(d\alpha)$ a $P(0)$-hoz képest, azaz egyenlő távolságban negatív forgás szerint követik egymást, és ez az egyenlő távolság $\frac{1}{M}$-nél kisebb. Így ez a sorozat a $\overline{P(0)P\left(\frac{1}{M}\right)}$ ívet nem ugorhatja át, tehát alkalmas k-val $P(kd\alpha)$ ezen az íven van.

Most már csak azt kell belátnunk, hogy $\lg n$ irracionális, és így $\alpha = \lg n$ választással alkalmazható a fenti észrevétel.

Ha a $p > 0$, $q > 0$ egész számokra $\lg n = \frac{p}{q}$ fennállna, akkor ebből $n = 10^{p/q}$, azaz $n^q = 10^p$ következne. Az $n^q = 2^p \cdot 5^p$ felbontásából látható, hogy $10|n$ és hogy n-nek, 2-től és 5-től különböző törzstényezője nem lehet. Innen már világos, hogy n maga is hatványa 10-nek, hiszen $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ alapján $2^{\alpha \cdot q} \cdot 5^{\beta \cdot q} = 2^p \cdot 5^p$-ből $\alpha = \beta$

Ám a feladat feltétele szerint $n \neq 10^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots,)$.

Pócsi György (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)