Felhasználjuk a következő segédtételt: ha valamely $f(x)$ függvény az $a \leq x \leq b$ intervallumban folytonos és $f(a)<0$, $f(b)>0$ (vagy fordítva), akkor létezik legalább egy olyan c hely, melyre $f(c)=0$ és $a<c<b$.

Tekintsük a $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ függvényt. Erre $f(0)=f(1)$ alapján

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)=0.$$

Két eset lehetséges. Vagy minden k-ra ($k=0,1,\ldots,n$) $g\left(\frac{k}{n}\right)=0$ vagy nem, s ebben az esetben van olyan k_1 és k_2 ($0 \leqq k_1<k_2 \leqq k_n$), melyekre pl.

$$g\left(\frac{k_1}{n}\right)<0 \qquad \text{és} \qquad g\left(\frac{k_2}{n}\right)>0.$$

Az első esetben nyilván készen vagyunk, a második esetben pedig az említett segédtételből következik állításunk.

Lévai Miklós (Tata, Eötvös J. Gimn.)

Megjegyzések. 1. Érdekes, hogy a tételben n csak természetes szám lehet. Az első pillanatban arra gondolhatunk, hogy a tétel általánosítható nem egész n-ekre. Ez azonban nem igaz.

Tekintsük ugyanis az

$$f(x)=\cos 2\,n\pi x-x\cdot\cos 2n\pi+x-1$$

függvényt, ahol $n>1$, nem egész. Mivel $f(0)=f(1)=0$, és $f(x)$ folytonos, a feltételek teljesülnek. Tegyük fel, hogy valamely x_0 esetén

$$0 \leqq x_0<x_0+\frac{1}{n} \leqq 1$$
$$\text{és} \quad f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{n}\right),$$

azaz

$$\cos 2n\pi x_0-x_0\cos 2n\pi+x_0-1=$$
$$=\cos 2n\pi\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-\left(x_0+\frac{1}{n}\right)\cos 2\,n\pi+\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-1.$$

Ebből átrendezéssel a $\cos 2n\pi=1$ egyenlethez jutunk, ahonnan

$$2n\pi=2\pi\cdot k,$$

ahol k valamely egész szám, és $n>0$ alapján $n=k$ következik, ahol k természetes szám.

Ezzel állításunkat beláttuk.

Lelkes András (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

2. Az alábbi szemléletes meggondolás pontossá tételével újabb megoldást kaphatunk (éspedig sokkal általánosabb formában).

Vegyünk egy olyan (egyenes) körhengert, melynek k körmetszete $\frac{1}{n}$ kerületű. A síkot (melyben adott az $y=f(x)$ függvény képe) tekerjük rá a hengerre úgy, hogy az x tengely éppen k-ra tekeredjen. Ha n egész, akkor $n\cdot\frac{1}{n}=1$ miatt a $(0,0)$-pont és az $(1,0)$ pont fedik egymást mondjuk P-ben a hengeren, és ha $n=2$, akkor a P-ből kiinduló és P-be visszatérő folytonos görbe a hengert legalább kétszer „megkerüli", és önmagát metszi. Ez feladatunk állításának helyességét mutatja.