I. megoldás. Ha f minden gyöke valós, akkor előállítható gyöktényezőinek a szorzataként:

$$f(x) = A(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n), \tag{1}$$

ahol A az f legmagasabb fokú tagjának az együtthatója ($A \neq 0$), n az f fokszáma és x_1, x_2, ..., x_n az f – nem feltétlenül különböző – gyökei. Azt mondjuk, hogy valamely x_0 szám az f-nek k-szoros gyöke, ha az x_1, x_2, ..., x_n számok között pontosan k egyenlő x_0-lal, azaz ha

$$f(x) = (x-x_0)^k \cdot g(x), \qquad \text{ahol} \qquad g(x_0) \neq 0. \tag{2}$$

Megmutatjuk, hogy ha x_0 az f-nek k-szoros gyöke, akkor az

$$F(x) = f(x) + \lambda f'(x)$$

polinomnak $x_0 (k-1)$-szeres gyöke. Valóban, ha f (2) alakú, akkor

$$\begin{aligned} F(x) =& (x-x_0)^k \cdot g(x) + \lambda k (x-x_0)^{k-1} \cdot g(x) + \lambda (x-x_0)^k \cdot g'(x) = \\ & (x-x_0)^{k-1} G(x), \end{aligned}$$

ahol
$$G(x) = (x-x_0)\cdot g(x) + \lambda k \cdot g(x) + \lambda (x-x_0)\cdot g'(x),$$
tehát
$$G(x_0) = \lambda k \cdot g(x_0) \neq 0.$$

Jelöljük f különböző gyökeinek a számát m-mel, és tegyük fel, hogy ezek rendre α_1-szeres, α_2-szeres, ..., α_m-szeres gyökei f-nek. Akkor ezek rendre $(\alpha_1 - 1)$-szeres, $(\alpha_2 - 1)$-szeres, ..., $(\alpha_m - 1)$-szeres gyökei F-nek, és mivel $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$, így már $(n-m)$ gyökét ismerjük F-nek. Megmutatjuk, hogy ha $\lambda \neq 0$, amint azt nyilván feltehetjük, akkor f bármely két szomszédos gyöke között van F-nek valós gyöke. Ezzel újabb $(m-1)$ valós gyök létezését bizonyítjuk, és ez elég is, hiszen ha F-nek $(n-1)$ gyöke valós, akkor

$$F(x) = A(x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_{n-1})\cdot F_1(x),$$

ahol $F_1(x)$ elsőfokú polinom, tehát F_1-nek van még egy valós gyöke.

Legyen tehát a és b az f két szomszédos gyöke:

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdot h(x),$$

ahol a h polinomnak nincs az $a \leq x \leq b$ szakaszon gyöke.

$$F(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \cdot \Big\{ (x-a)(x-b)\big[h(x) + \lambda h'(x)\big] + \big[\alpha(x-b) + \beta(x-a)\big] \Big\}.$$

Itt a kapcsos zárójelben álló kifejezés értéke $x = a$ mellett $\alpha(a-b)$, ami negatív, $x = b$ mellett $\beta(b-a)$, ami pozitív, ha pedig egy polinom (vagy általában egy folytonos függvény) egy szakasz két végpontjában különböző előjelű, akkor a polinomnak van ezen a szakaszon gyöke. A bizonyítást ezzel befejeztük.

II. megoldás. Legyen $z = a + bi$ az $F(z)$ polinomnak tetszőleges gyöke. Megmutatjuk, hogy $b = 0$, azaz z valós. Nyilván feltehetjük, hogy $\lambda \neq 0$. Mivel $F(z) = f(z) + \lambda f'(z) = 0$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{1}{\lambda},$$

tehát $f'(z)/f(z)$ valós. Tekintsük f-nek az (1) alakját, akkor

$$f'(z) = A \sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k} (z - x_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(z)}{z - x_k},$$

tehát
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a-x_k) + bi} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a - x_k}{(a-x_k)^2 + b^2} - bi \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a-x_k)^2 + b^2},$$
ami csak úgy lehet valós, ha $b = 0$. Feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.