I. megoldás. Felhasználva az ismert

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\qquad\text{és}\qquad\cos(x+y)=2\cos^2\frac{x+y}{2}-1$$

azonosságokat, egyenletünk – egyszerű átalakítás után – a következő alakban írható:

$$\left(2\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\sin^2\frac{x-y}{2}=0,$$

ami ekvivalens az alábbi egyenletrendszerrel:

$$2\cos\frac{x+y}{2}=\cos\frac{x-y}{2},\tag{1}$$

$$\sin\frac{x-y}{2}=0.\tag{2}$$

(2)-ből $x-y=2k\pi$ (ahol k egész), azaz $y=x-2k\pi$. Ezt (1)-be helyettesítve

$$2\cos(x-k\pi)=\cos k\pi,$$

vagyis

$$2(-1)^k\cos x=(-1)^k,$$

tehát

$$\cos x=\frac{1}{2},$$

s így egyenletünk megoldásai:

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi,\qquad y=\pm\frac{\pi}{3}+2(m-k)\pi\qquad(k,\ m\ \text{egész}),$$

ahol vagy mindkét helyen a plusz, vagy mindkét helyen a mínusz előjel veendő figyelembe.

II. megoldás. Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ olyan egy közös pontból kiinduló egységvektorok, hogy ugyanazon forgási irány szerint az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által közrezárt szög rendre $x+y$, $\pi-x$ legyen, ekkor a $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ közti szög $\pi-y$. Így a skaláris szorzat ismert tulajdonságai alapján az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{v}$ vektorra

$$\begin{gathered}\mathbf{v}^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2(\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{ca})=\\ 3+2\big(\cos(x+y)+\cos(\pi\ x)+\cos(\pi-y)\big)=\\ 3-2\big(\cos x+\cos y-\cos(x+y)\big),\end{gathered}$$

tehát

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3-\mathbf{v}^2}{2}\le\frac{3}{2},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, azaz $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, vagyis e három egységvektor egymásba fűzése egy szabályos háromszöget ad, tehát páronként bezárt irányszögük abszolút értéke $\frac{2\pi}{3}$. Így

$$\pi-x=\pm 2\pi/3+2n\pi,\qquad\pi-y=\pm 2\pi/3+2m\pi$$

(n, m egészek), amiből egyszerű átalakítások után látható, hogy a megoldás

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\qquad y=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi\qquad(k,\ m\ \text{egész})$$

alakban írható.

Páles Zsolt (Sátoraljaújhely, Kossuth L. Gimn.)