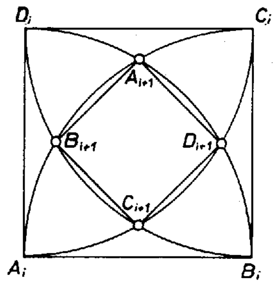
I. megoldás. Ismeretes – ez könnyen be is látható – a szabályos háromszög rács következő tulajdonsága: ha A és B rácspont, akkor B-nek A körüli $+60°$-os elforgatottja is rácspont. Ezt használjuk fel. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az A_1, B_1, C_1 és D_1 rácspontok által meghatározott négyszög négyzet (a csúcsok körüljárása legyen pozitív). Jelölje $i = 1, 2, 3, \ldots$ mellett A_{i+1}, B_{i+1} C_{i+1} és D_{i+1} rendre B_i-nek A_i körüli, C_i-nek B_i körüli, D_i-nek C_i körüli és A_i-nek D_i körüli $+60°$-os elforgatottját. Az előbb mondottak értelmében a forgatásokkal kapott pontok mindegyike rácspont. A_{i+1}-nek az A_iB_i egyenestől mért távolsága $\sqrt{3} \cdot A_iB_i/2$, tehát kisebb, mint A_iB_i, ezért az A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1} és D_{i+1} pontok mindegyike az $A_iB_iC_iD_i$ négyzet belsejében van (1. ábra).



1. ábra

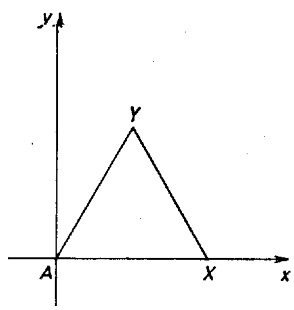
Ha az $A_iB_iC_iD_i$ és $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}D_{i+1}$ négyszögeket $+90°$-kal elforgatjuk az $A_iB_iC_iD_i$ négyzet középpontja körül, az A_{i+1} pont B_{i+1}-be, a B_{i+1} pont C_{i+1}-be, a C_{i+1} pont D_{i+1}-be és a D_{i+1} pont A_{i+1}-be kerül, vagyis $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}D_{i+1}$ is négyzet.

Így azt kaptuk, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ négyzet belsejében végtelen sok rácspont van, ez pedig ellentmondás.

Jakab Tibor (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

II. megoldás. Ismét indirekt módon bizonyítunk.

A rácspontokból álló négyzet csúcsait (a pozitív körüljárás irányában haladva) jelölje A, B, C és D. Az adott rácsot meghatározó háromszöggel egybevágó AXY pozitív körüljárású háromszög A csúcsában vegyük fel a koordináta-rendszer kezdőpontját, és az AX félegyenes legyen az x tengely pozitív fele (2. ábra).



2. ábra

Mint ismeretes, azok és csak azok a P pontok lesznek rácspontok, amelyekre alkalmas α és β egész számokkal

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AX} + \beta \cdot \overrightarrow{AY}.$$

Ezért, s a feltevés alapján van olyan p, q, r, s egész szám, hogy

$$\overrightarrow{AB} = p \cdot \overrightarrow{AX} + q \cdot \overrightarrow{AY},$$
$$\overrightarrow{AD} = r \cdot \overrightarrow{AX} + s \cdot \overrightarrow{AY}.$$

Mivel másrészt $\overrightarrow{AX}$ koordinátái $(1;\, 0)$ és $\overrightarrow{AY}$ koordinátái $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ azért

$$\overrightarrow{AB}\left(p + \frac{q}{2},\quad \frac{q\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{AD}\left(r + \frac{s}{2},\quad \frac{s\sqrt{3}}{2}\right).$$

A feltevés szerint $\overrightarrow{AD}$ az $\overrightarrow{AB}$-nek $(+90^\circ)$-os elforgatottja, ezért

$$p+\frac{q}{2}=\frac{s\sqrt{3}}{2},$$
$$-\frac{q\sqrt{3}}{2}=r+\frac{s}{2}.$$

Ezekből ellentmondás következik, hiszen pl. $\sqrt{3}=\dfrac{2p+q}{s}$, vagyis $\sqrt{3}$ racionális, ami nyilván nem igaz.

Kelemen Dezső (Kaposvár, Táncsics M. Gimn.)