A $c(f^2+g^2)=(\sqrt{c}f)^2+(\sqrt{c}g)^2$ és $1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ azonosságok alapján feltehetjük, hogy legalább elsőfokú polinomról van szó és a legmagasabb fokú tag együtthatója 1. Az algebra alaptétele szerint minden ilyen n-edfokú $f(x)$ polinom felírható a következő alakban:

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n), \tag{1}$$

ahol α_1, α_2, ..., α_n az $f(x)$ gyökei, egymástól nem feltétlenül különböző komplex számok.

Ha $f(x)\geqq 0$, akkor bármely valós gyökének megfelelő gyöktényező páros sokszor szerepel (1)-ben, mert különben $f(x)$ előjelet váltana az illető gyök-helyen áthaladva. Így

$$f(x)=g^2(x)\cdot h(x), \tag{2}$$

ahol $g(x)$ és $h(x)$ valós együtthatós polinomok, $h(x)\geqq 0$ és $h(x)$-nek nincs valós gyöke.

A továbbiakban felhasználjuk a következő egyszerű összefüggéseket:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\qquad \overline{z_1 z_2}=(\overline{z_1})\cdot(\overline{z_2}) \tag{3}$$

$$z\cdot\overline{z}=(\mathrm{Re}\ z)^2+(\mathrm{Im}\ z)^2, \tag{4}$$

ahol z_1, z_2 tetszőleges komplex számok, továbbá $\overline{z}$, Re z ill. $textIm\ z$, rendre a z konjugáltját, valós részét, ill. képzetes részét jelöli.

(3) alapján könnyen belátható, hogy ha az α komplex szám gyöke $h(x)$-nek, akkor $\overline{\alpha}$ is gyöke $h(x)$-nek, tehát $h(x)$ gyöktényezős felbontását (3) alapján átalakítva $h(x)=r(x)\cdot\overline{r(x)}$, ahol $r(x)$ komplex együtthatós polinom. Felhasználva (4)-et

$$h(x)=\left[\mathrm{Re}\ r(x)\right]^2+\left[\mathrm{Im}\ r(x)\right]^2.$$

Így (2) alapján

$$f(x)=\left[g(x)\cdot\mathrm{Re}\ r(x)\right]^2+\left[g(x)\cdot\mathrm{Im}\ r(x)\right]^2,$$

ami a feladat állítását adja, hiszen $g(x)$, Re $r(x)$ és Im $r(x)$ valós együtthatós polinomok.