Tegyük fel, hogy $f(x)$ függvény kielégíti a feladat feltételeit. Ekkor bármely k egész számra

$$f(k \cdot x) = k \cdot f(x), \tag{1}$$

hiszen a b) feltételt az x, $n \cdot x$ (n természetes szám) párokra felírva adódik, hogy $f\left((n+1) \cdot x\right) = f(x) + f(n \cdot x)$, amiből teljes indukcióval következik, hogy $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$.

Könnyű belátni, hogy $f(0) = 0$. Alkalmazzuk b)-t az x_1 és $x_2 = 0$ számokra: $f(x_1+0) = f(x_1)+f(0)$, innen $f(0) = 0$ adódik. Ennek ismeretében a b) feltételt az $n \cdot x$ és $-n \cdot x$ számokra alkalmazva kapjuk, hogy $f(-n \cdot x) = -n \cdot f(x)$.

Ha r racionális szám: $r = \dfrac{k}{m}$, ahol k, m egészek és $m \neq 0$, akkor (1)-et kétszer alkalmazva

$$k \cdot f(x) = f(k \cdot x) = f\left(m \cdot \left(\frac{k}{m}x\right)\right) = m \cdot f\left(\frac{k}{m}x\right),$$

amiből m-mel való osztással

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x). \tag{2}$$

Ebből a c) feltétel alapján minden racionális helyen

$$f(r) = r. \tag{3}$$

Az a) feltétel kihasználásával megmutatjuk, hogy (3) az irracionális számokra is fennáll Tegyük feI, hogy $f(x)$ korlátos az $(a,\ b)$ intervallumban és legyen x_0 irracionális szám. Ekkor bármely r racionális számhoz található olyan t valós szám, hogy tr az $(a,\ b)$ intervallumba esik, és hogy $rx_0 + tr$ racionális. Így a (3), a b) és (2) alapján

$$rx_0 + tr = f(rx_0 + tr) = f(rx_0) + f(tr) = rf(x_0) + f(tr),$$

amiből

$$tr - f(tr) = r\left(f(x_0) - x_0\right).$$

Mivel itt r tetszőlegesen nagy racionális szám lehet, és a bal oldalon álló mennyiség korlátos, ez csak úgy lehet igaz, ha $f(x_0) = x_0$, tehát a feladat feltételeit csak az $f(x) = x$ függvény elégíti ki.

Megjegyzések. 1. Megoldásunkból az is kiolvasható, hogy a korlátosság helyettesíthető felülről vagy alulról való korlátossággal is.

2. Megmutatható, hogy ha az a) feltételt elhagyjuk, akkor van az $f(x) = x$ függvénytől különböző megoldás is.[1]

[1] *Matematikai Lapok,* feladatrovat 166. feladat. Megoldása a 20. évfolyam (1969) 415. oldalán