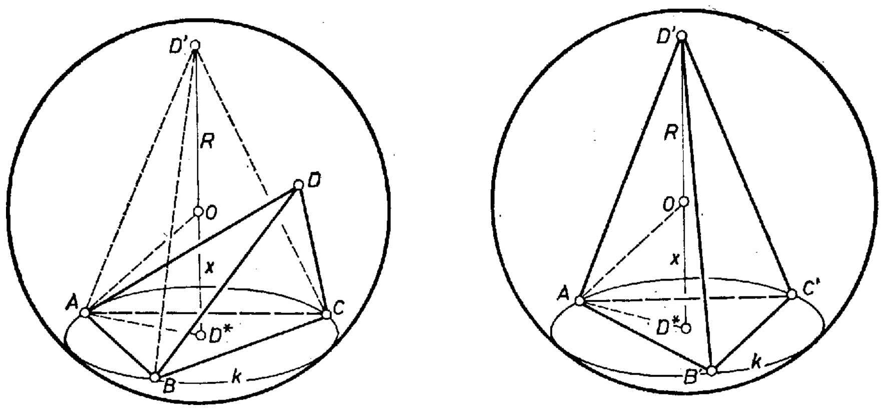
Az 1782. feladatban[1] bebizonyítottuk, hogy adott körbe írható háromszögek közül a szabályosnak a területe a legnagyobb.

Jelölje egy, az O középpontú, R sugarú gömbbe írt tetraéder csúcsait A, B, C és D. Az ABC háromszög köré írt kör (az ABC sík és a gömb metszete) legyen k. Tekintsük azt a gömbünkbe írt $ABCD'$ tetraédert, melyre D' az ABC síknak ugyanazon az oldalán van, mint D, és $OD' \perp ABC$, továbbá azt az $AB'C'D'$ tetraédert, melyre az $AB'C'$ háromszög a k körbe írt szabályos háromszög. Az 1782. feladat értelmében a térfogatokra nyilvánvalóan

$$V_{ABCD} \le V_{ABCD'} \le V_{AB'C'D'}.$$

Az $AB'C'D'$ tetraéder tehát olyan, hogy az $AB'C'$ háromszög szabályos és $OD' \perp AB'C'$.



Tegyük fel először, hogy D' az $AB'C'$ síknak ugyanazon oldalán van, mint O. Az $AB'C'$ háromszög középpontja legyen D^*, s jelöljük OD^*-ot x-szel. Fejezzük ki a térfogatot x-szel. Pitagorász tételének többszöri alkalmazásával

$$AD^* = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad AB' = \sqrt{3} \cdot \sqrt{R^2 - x^2},$$
$$V_{AB'C'D'} = \frac{(R^2 - x^2)(R + x)\sqrt{3}}{4}.$$

Írjuk ezt a következő alakban:

$$V_{AB'C'D'} = \frac{\sqrt{3}}{8}(2R - 2x)(R + x)(R + x).$$

Alkalmazva a mértani és a számtani közép közötti összefüggést:

$$\sqrt[3]{V_{AB'C'D'}} = \frac{\sqrt[6]{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{(2R - 2x)(R + x)(R + x)} \le \frac{\sqrt[6]{3}}{2} \cdot \frac{4R}{3} = \frac{\sqrt[6]{3} \cdot 2R}{3}.$$

Innen a

$$V_{AB'C'D'} \le \frac{8R^3}{9\sqrt{3}}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami éppen a bizonyítandó állítás. Könnyen látható, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha a tetraéder szabályos.

Ha O és D' nincsenek az $AB'C'$ sík ugyanazon oldalán, akkor D'-t O-ra tükrözve a D''-be, nyilvánvalóan

$$V_{AB'C'D'} < V_{AB'C'D''} \le \frac{8R^3}{9\sqrt{3}}$$

(ez utóbbi a fenti gondolatmenet alkalmazhatósága alapján igaz), s innen ugyancsak következik az állítás.

[1] Lásd a megoldást K. M. L. 45 (1972) 52. oldal.