Legyen $A_n = 2(a_n - 1)$, akkor $A_0 = 2(c-1) = C$, és

$$A_n = A_{n-1}^2 - 2 \qquad n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

Keressük A_n-et $A_n = P_n + Q_n$ alakban. A komponensekre vonatkozó

$$P_n + Q_n = P_{n-1}^2 + Q_{n-1}^2 + 2(P_{n-1}Q_{n-1} - 1) \tag{3}$$

rekurzíót fel tudnánk oldani, ha sikerülne elérni, hogy az utolsó tag minden n-re eltűnjön:

$$P_{n-1}Q_{n-1} = 1. \tag{4}$$

Ez teljesül, ha biztosítjuk, hogy (3) tagonként

$$(3a) \qquad P_n = P_{n-1}^2; \qquad (3\mathrm{b}) \qquad Q_n = Q_{n-1}^2$$

is teljesüljön, Ebben az esetben ugyanis elég (4)-et $n = 1$ mellett biztosítani, hiszen ha (4) teljesül valamilyen n-re, akkor (3a) és (3b) szerint $(n+1)$-re is teljesül.

Legyen tehát P_0, Q_0 az

$$\begin{aligned} P_0Q_0 &= 1 \\ P_0 + Q_0 &= C \end{aligned} \tag{5}$$

egyenletrendszer gyöke (ha megoldásul komplex számokat is megengedünk, (5) tetszőleges C mellett megoldható). Ezekből a P_0, Q_0 számokból kiindulva képezzük a (3a), (3b) képzési szabállyal a P_0, Q_0 számokat: ezekre (4) teljesülni fog minden n-re, és a belőlük kapott $A_n = P_n + Q_n$ sorozatra teljesül (2). Könnyen látható, hogy (3a), (3b) szerint

$$P_n = P_0^{2^n}, \qquad Q_n = Q_0^{2^n} + 1).$$

Tehát

$$a_n = \frac{1}{2}(P_0^{2^n} + Q_0^{2^n},$$

ahol P_0, Q_0 (5) gyökei, és (5)-ben $C = 2c - 2$.

Kollár János (Budapest, Piarista Gimn.)