A feladatban szereplő 100-as számnak észrevehetően semmi szerepe nincs, az állítás tetszőleges $n \geqq 5$ természetes számra igaz, ezt fogjuk bizonyítani.

Írjunk az adott pontok köré egységsugarú gömböket. Ezek közül akárhogy veszünk ki négyet, van olyan pont, amelyik mindegyikben benne van, hiszen a gömbök középpontjait a feltevés szerint tartalmazó egységsugarú gömb középpontja minden esetre ilyen mind a négy gömbben bennelevő (vagy a gömbök határán levő) pont. Elegendő lesz megmutatni, hogy van olyan pont, amelyik mindegyik gömbben benne van, hiszen egy ilyen körül egységsugarú gömböt rajzolva, az összes gömb középpontját, vagyis az összes adott pontot (a belsejében vagy a határán) tartalmazó gömböt kapunk.

Azt fogjuk bizonyítani, hogy ha adott a térben ($n \geqq 5$) gömb úgy, hogy bármelyik négyhez található olyan pont, amelyiket mind a négy tartalmazza, akkor olyan pont is van, amelyiket mindegyik gömb tartalmazza. Az állítás $n = 4$ mellett semmitmondó. Tegyük fel, hogy már bebizonyítottuk az állítást az n-nél kisebb természetes számok mindegyikére ($n > 4$), és legyenek a G_1, G_2, …, G_n, gömbök olyanok, hogy közülük bármelyik négyhez található olyan pont, amelyiket mind a négy tartalmazza. Ha elhagyjuk a gömbök közül – mondjuk – az i-ediket ($i = 1, 2, \ldots, n$), a visszamaradó $(n-1)$ gömbre alkalmazható a már bebizonyított állítás. Emiatt van olyan P_i pont, amelyikről G_i kivételével tudjuk, hogy mindegyik gömb tartalmazza.

Tekintsük a P_1, P_2, P_3, P_4 és P_5 pontokat (itt használjuk ki, hogy $n \geqq 5$). Megmutatjuk, hogy ezek két csoportba oszthatók úgy, hogy a két csoport konvex burkának van közös pontja. Ez a közös pont lesz az a pont, amelyiket az összes gömb tartalmaz. Legyen ugyanis a mondott csoportosítás például, (P_1, P_2, P_3) és (P_4, P_5). A P_1, P_2, P_3 pontok konvex burkában levő pontokról tudjuk, hogy minden, 1-től, 2-től, és 3-tól különböző i-re a G_i gömb tartalmazza őket. A P_4, P_5 pontok konvex burkában levő pontokról tudjuk, hogy minden, 4-től és 5-től különböző i-re a G_i gömb tartalmazza őket. Tehát ha egy pont mind a két konvex burokban benne van, azt az összes gömb tartalmazza. Hasonló meggondolás vezet célra tetszőleges csoportosítás esetén is.

Azt kell tehát már csak belátni, hogy ha adott öt pont a térben, két csoportra oszthatjuk őket úgy, hogy a két csoport konvex burkának van közös pontja.

Ha valamelyik benne van a többi konvex burkában, ez nyilvánvaló.

Ha egyik sincs benne a többi konvex burkában, de köztük négy egy síkban van, azok konvex burka csak négyszög lehet. Ekkor egyik csoport legyen ennek a négyszögnek két átellenes pontja, és a másik csoport a többi. Mivel a két átló metszi egymást, ez megfelelő csoportosítás.

Végül, ha egyik sincs benne a többi konvex burkában, és nincs közöttük négy egy síkban, legyen AB a pontok konvex burkának az egyik éle. A-hoz és B-hez rendre hozzávéve a másik három pont közül az egyiket, három háromszöget kapunk, ezek közül kettő oldallapja a konvex buroknak, a harmadik nem. Legyen ez a harmadik az ABC háromszög. Ha ennek van a konvex burok belsejében futó éle, annak két végpontja legyen az egyik csoport, ha ilyen nincs, a háromszög három csúcsa legyen az egyik csoport. Mindkét esetben azt kapjuk, hogy az egyik csoportba egy háromszög három csúcsa tartozik, a másikba egy ezt a háromszöget átdöfő szakasz két végpontja. Ez a csoportosítás tehát megfelelő.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. A fenti megoldás némi rokonságot mutat a P. 164. feladat megoldásával[1]. A rokonság oka, hogy a bizonyított állítások a következő, *Helly*-től származó tétel speciális esetei. *Ha adott a k-dimenziós térben véges sok konvex halmaz úgy, hogy bárhogy veszünk közülük $(k+1)$-et, azok metszete nem üres, akkor van olyan pont, amelyik e konvex halmazok mindegyikében benne van.* Mindkét feladat megoldásában ennek a bizonyítását mondtuk el a speciális körülmények adta egyszerűsítésekkel élve. Igaz az állítás végtelen sok konvex halmazra is, ha közülük legalább az egyik korlátos, és mindegyikük zárt.

A 164. feladat megoldásában tulajdonképpen kényelmesebb lett volna ezt a változatot használni, ehhez azonban a teljes indukciós bizonyítás helyett más bizonyítást kellett volna találni. Jól látszanak a felmerülő nehézségek, ha a $k = 1$ esetre gondolunk, ebben az esetben ugyanis a mondott állítás következménye a következő tétel: ha adott a racionális számoknak két részhalmaza úgy, hogy az első balra van a másodiktól a számegyenesen abban az értelemben, hogy az elsőnek bármely eleme kisebb a másodiknak bármely eleménél akkor van olyan valós szám, amelyiknél az első részhalmaz bármely eleme kisebb, és amelyiknél a második részhalmaz bármely eleme nagyobb.

Szokás ezt a tulajdonságot a valós számok egyik axiómájának is tekinteni. *R. Dedekind* (1831–1916) német matematikus vezette be ezt az axiómát, az ő emlékére nevezik a számegyenes ilyen típusú kettévágását „Dedekind szeletnek”.

[1] Lásd ezen számban, 117. oldal.