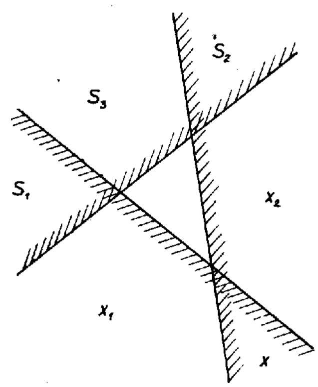
Ha a pontok egy egyenesen vannak, az állítás könnyen belátható. A következő megoldás azonban ebben az esetben nem működik, ezért ennek az esetnek a tisztázását az olvasóra hagyjuk.

Kössük össze egyenessel a pontrendszerhez tartozó pontpárokat, és tekintsük az így kapott egyenesek által határolt félsíkokat. Nevezzünk egy ilyen félsíkot „telített”-nek, ha a pontoknak több mint (2/3)-a bennük van. Megmutatjuk, hogy a telített félsíkok metszete nem üres, és a metszet bármely pontja választható a feladatban szereplő P pontnak.

Tegyük fel az első állításunkkal ellentétben, hogy a telített félsíkoknak nincs közös pontjuk. Nevezzünk egy természetes k számot „elválasztó”-nak, ha található a telített félsíkok között k úgy, hogy ezek metszete már üres. Eszerint a telített félsíkok N száma elválasztó. Vegyük a legkisebb elválasztó számot, és jelöljük azt m-mel. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy m egyenlő-e 3-mal vagy sem.

Ha $m = 3$, akkor legyen S_1, S_2, S_3 az a három telített félsík, amelyek metszete üres (1. ábra; ha több ilyen van, úgy az S_1, S_2, S_3 hármas bármelyikük lehet).



1. ábra

Jelöljük az S_1 és S_2 közös részében levő pontok számát x-szel, a csak S_1-ben levő pontokét x_1-gyel, a csak S_2-ben levőkét x_2-vel. Feltevéseink szerint egyrészt

$$x + x_1 > \frac{2}{3}n \quad \text{és} \quad x + x_2 > \frac{2}{3}n$$

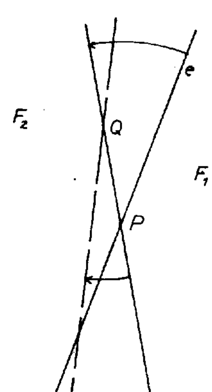
másrészt

$$x + x_1 + x_2 \leqq n,$$

tehát $x > \frac{1}{3}n$. Hasonlóan kapjuk, hogy S_2 és S_3, valamint S_3 és S_1 metszetében is $\frac{1}{3}n$-nél több pont van, ami nyilvánvaló ellentmondás.

Rátérünk az $m > 3$ eset vizsgálatára. Legyenek S_1, S_2, $\ldots$, S_m azok a telített félsíkok, amelyek metszete üres (ha több lehetőség van a választásra, ismét tetszőlegesen választhatunk). Mivel m a legkisebb elválasztó szám, akárhogy hagyunk el egyet e síkok közül, a többiek metszete már nem lehet üres. Legyen P_i olyan pont, amelyik S_i kivételével mindegyik mondott félsíkban benne van ($i = 1, 2, \ldots, m$). Tekintsük a P_1, P_2, P_3, P_4 pontok konvex burkát: ha ez egy szakasz vagy háromszög, legyen Q a P_1, P_2, P_3, P_4 pontok közül az, amelyik nem csúcsa (vagy végpontja) a konvex buroknak, ha pedig négyszög, akkor Q legyen az átlók metszéspontja. Könnyű ellenőrizni, hogy ez a Q az S_i síkok mindegyikében benne van, tehát ismét ellentmondásra jutottunk.

Ezzel beláttuk, hogy van olyan P pont, amelyik mindegyik telített félsíkban benne van. Azt kell még megmutatnunk, hogy minden P-n átmenő egyenes mindkét partján legalább $n/3$ pont található. Ismét tegyük fel, hogy ez nem igaz, és legyen e olyan P-n átmenő egyenes, amelynek egyik oldalán (az F_1 félsíkban) $(n/3)$-nál kevesebb pont van (2. ábra).



1. ábra

Akkor e-nek a másik oldalán (az F_2 félsíkban) – az e-n levő pontokat nem is számítva – több mint $\frac{2}{3}n$ pont van.

Ha van e-n az adott pontok közül való, legyen Q köztük a P-től legtávolabbi (ha két ilyen pont is volna, ezek egyike). Ha ilyen pont nincs, forgassuk e-t P körül pozitív forgásirányba mindaddig, amíg az adott pontok valamelyikébe nem ütközik. Ha ebben a helyzetben van rajta F_2-beli adott pont, Q legyen ezek közül a P-hez legközelebbi; ha ilyen nincs, Q legyen a P-től legtávolabb levő, az egyenesen levő adott pont.

Forgassuk tovább e-t Q körül olyan irányban, hogy e új helyzetében P és az F_1-beli adott pontok e-nek ugyanazon az oldalán legyenek. Tartson ez a forgatás mindaddig, amíg a pontrendszer újabb pontjába nem ütközik. Mivel a pontok nem az egyenes pontjai, ez hamarabb bekövetkezik, mint hogy kiinduló helyzetünkbe visszatérünk. Forgatás közben egyetlen adott pont sem került át e egyik oldaláról a másikra, e-nek tehát a P-t nem tartalmazó oldala telített félsík, amelyikben P nincs benne. Ismét ellentmondásra jutottunk, ezzel az előrebocsátottak értelmében a feladat megoldását befejeztük.