Legyen P a tetraéder tetszőleges belső pontja, és mondjuk azt, hogy a tetraéder valamelyik lapja P-re nézve labilis, ha P-nek az illető lap síkján levő merőleges vetülete kívül van a testen. Megmutatjuk, hogy ha P-re egy bizonyos feltétel teljesül, akkor a tetraédernek legfeljebb két, a P-re nézve labilis lapja lehet. Ez a bizonyos feltétel olyan lesz, hogy az a súlypontra mindig teljesül; ezzel tehát belátjuk a feladat állítását. – Itt nem fogjuk megvizsgálni, hogy elképzelhető-e olyan tetraéder, melynek van olyan – a súlyponttól különböző – belső pontja, melyre ez a feltétel nem teljesül, csak megjegyezzük, hogy ilyen példa megadható.

Legyen tehát P egy adott pont a tetraéder belsejében, melynek egy bizonyos később tisztázandó tulajdonsága megvan. Ha a tetraéder valamelyik lapja P-re nézve labilis, P-től az illető lap felé a P-ből a lapra bocsátott merőleges mentén haladva előbb lépünk ki a tetraéderből, mintsem az illető lapot elérnénk, a merőleges egyenes előbb a tetraéder valamelyik másik lapját metszi. Mondjuk azt, hogy ez a másik lap P-ből nézve *takarja* az illető, P-re nézve labilis lapot.

Az ilyen, labilis lapokat takaró lapok mindig közelebb vannak P-hez, mint maga a labilis lap, hiszen már a labilis lapra merőleges egyenes mentén van a P-hez közelebbi pontjuk. Emiatt a P-hez legközelebbi lap nem lehet P-re nézve labilis, a többi lap ugyanis nem tudja takarni. Egy nem labilis lap – nevezzük az ilyet *stabil*nak – tehát tetszőleges P-re nézve létezik.

Jelöljük ennek a lapnak a síkját S_1-gyel, P-nek S_1-en levő vetületét P_1-gyel. A PP_1 egyenes még egy pontban metszi a tetraéder felületét, jelöljük ezt Q-val, és az átmetszett lap síkját S_2-vel. Ha S_2 stabil, akkor már csak a még nem említett lapok lehetnek labilisak, állításunk tehát igaz.

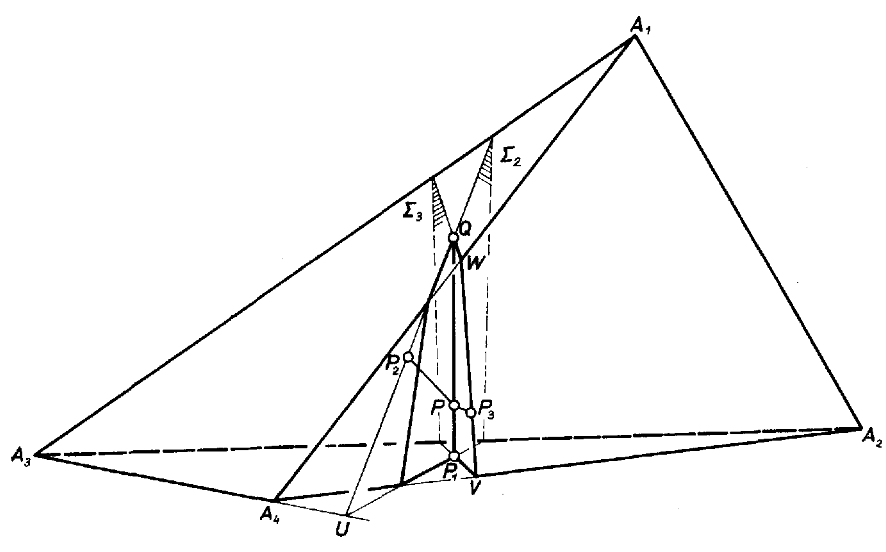
Előfordulhat azonban, hogy S_2 labilis. Jelöljük ekkor az S_2-t takaró lap síkját S_3-mal, a negyedik lapsíkot S_4-gyel, és vizsgáljuk meg, mi a feltétele annak, hogy S_3 stabilis legyen. S_3-at S_2 nyilván nem takarhatja, hiszen S_3 közelebb van P-hez, mint S_2. Megmutatjuk, hogy S_3-at S_4 sem takarhatja, és ha P nincs túl közel S_1-hez, pontosabban mondva, ha

$$PP_1 > \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot PQ, \tag{1}$$

akkor S_1 sem takarhatja S_3-at. Ha tehát P-re teljesül (1), akkor vagy már S_2 stabilis, vagy ha ez nem is az, akkor S_3 biztosan az. – Amennyiben P a tetraéder súlypontja, akkor (1) teljesül, hiszen ekkor

$$\frac{PP_1}{PQ} \geq \frac{1}{3} > \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0{,}207.$$

Jelöljük a tetraéder S_i-vel szemközti csúcsát A_i-vel, P-nek S_i-n levő vetületét P_i-vel ($i = 1, 2, 3, 4$). A P_2 pontból a PQ szakasz derékszög alatt látszik, P_2 tehát rajta van a PQ feletti Thalész-gömbön. Ha S_3 takarja S_2-t, azaz P_2 az S_3 síknak a tetraéderrel ellentétes oldalán van, akkor a PP_3P_2 szög tompaszög, tehát P_3 a PP_2 szakasz feletti Thalész-gömb belső pontja. Megmutatható, hogy ha adott egy G gömb, a G húrjai feletti Thalész-gömbök egyesítése egy, a G-vel koncentrikus gömböt tölt ki, amelynek a sugara G sugarának a $\sqrt{2}$-szerese. Ha, P-re teljesül (1), a PQ feletti Thalész-gömböt a centrumából $\sqrt{2}$-szeresére növelve, még mindig teljes egészében S_1 felett marad, ekkor tehát P_3 az S_1-nek ugyanazon az oldalán van, mint maga a tetraéder, vagyis S_1 nem takarhatja S_3-at.



Meg kell még mutatnunk, hogy ha S_3 takarja S_2-t, akkor S_4 nem takarhatja S_3-at. Jelöljük a PQ-n átmenő, S_i-re merőleges síkot Σ_i-vel ($i = 2, 3$). Σ_2 merőleges S_1-re, tehát A_3A_4-re is, így mindenesetre metszi azt, jelöljük a metszéspontot U-val. A P_1QU háromszögben P_1-nél derékszög van, emiatt a P_1Q szakaszon levő P pont vetülete a QU szakaszon van. Ez a vetület nem más, mint P_2, hiszen $\Sigma_2 \perp S_2$. Ha S_3 takarja S_2-t, P_2 az S_3-nak már a tetraédert nem tartalmazó oldalán van, és így ott van U is, tehát U az A_3A_4 szakasz A_4-en túli meghosszabbításán van. Emiatt az $A_2A_3A_4$ háromszögben A_4-nél tompaszög van, és mivel $P_1U \perp A_3A_4$, azért P_1-nek az A_2A_4 egyenesen levő vetülete az A_2A_4 szakaszon is rajta van, jelöljük ezt V-vel. Az is az $A_2A_3A_4$ háromszög és a P pont most megismert helyzetéből következik, hogy a P_1V egyenes az A_2A_3 szakaszt is metszi, Σ_3 tehát elválasztja A_2-t az A_3, A_4 pontoktól. El kell választania Σ_3-nak A_1-et is az A_3, A_4 pontoktól, különben nem tartalmazhatná az $A_1A_3A_4$ háromszög Q pontját. Σ_3 tehát metszi az A_1A_4 szakaszt, jelöljük ezt a metszéspontot W-vel.

Tekintsük a QP_1VW négyszöget. Mivel ebben P_1-nél derékszög van, P_3 a P_1Q egyenesnek ugyanazon oldalán van, mint maga a négyszög. Ha tehát P-ből P_3 felé haladva ki is lépünk a négyszögből, ezt csak a P_1V, vagy QW szakaszon át tehetjük, ami épp azt jelenti, hogy S_3 elé csak S_1 vagy S_2 állhat, de S_4 semmi esetre sem. – A bizonyítást ezzel befejeztük.