Először is megmutatjuk, hogy

$$f_n(x) = \begin{cases} q^{k-1}, & \text{ha } x \text{ tizedestört alakjában a } k\text{. helyen} \\ & \text{szerepel először az 5-ös és } k \le n, \\ 0, & \text{ha az első } n \text{ tizedesjegyben nincs 5-ös} \end{cases} \tag{3}$$

(amelyik számnak két tizedestört alakja van, annak a véges alakját használjuk, pl. $\frac{4}{5}$-nél a $0{,}800\ldots$ alakot használjuk és nem a $0{,}799\ldots$ alakot).

Állításunk $n=1$-re igaz. Belátjuk, hogy ha $n$-re igaz az állításunk, akkor $(n+1)$-re is igaz. Tekintsük $f_{n+1}(x)$-et. Ha $x$-ben az első $n$ tizedesjegy között van 5-ös, akkor (3) szerint $f_n(x)>0$, ezért $f_{n+1}(x)=f_n(x)$. Ha az első 5-ös a $k$-adik tizedesjegy, akkor $f_{n+1}(x)=f_n(x)=q^{k-1}$ $(k\le n)$. Ha $x$-ben az első 5-ös az $(n+1)$-edik tizedesjegy, akkor $f_{n+1}(x)=q^{n+1-1}=q^n$, hiszen $x$ $(n+1)$-edik tizedesjegye 5-ös és $f_n(x)$ ennél az $x$-nél (1) miatt 0 volt. Végül ha $x$-ben az $(n+1)$-edik tizedesjegyig nincs 5-ös, akkor az indukciósfeltétel miatt $f_{n+1}(x)=0$. Ezzel (3)-at beláttuk.

Az $f_n(x)$ függvény (3) alatti alakja szerint

$$a_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k q^{k-1},$$

ahol $\alpha_k$ mindazon szakaszok hosszának összege, amelyek részei a $(0;\,1)$ intervallumnak és tetszőleges pontjuknak tizedestört alakjában a $k$-adik tizedesjegy 5-ös, de az előtte levők egyike sem az.

Az $\alpha_k$ számok meghatározása céljából osszuk fel a $(0;\,1)$ intervallumot $10^k$ db $\frac{1}{10^k}$ hosszúságú, balról zárt, jobbról nyílt intervallumra. Közülük egy tetszőlegest kiválasztva, annak bal oldali végpontja $0,b_1b_2\ldots b_k00\ldots$ alakú, és az intervallumbeli összes szám első $k$ tizedesjegye megegyezik Így elegendő az intervallumok bal végpontját vizsgálni. Mivel a megfelelő bal végpontok száma $9^{k-1}$, $\alpha_k=\frac{9^{k-1}}{10^k}$, így

$$a_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{9^{k-1}q^{k-1}}{10^k}=\frac{1}{10}\,\frac{\left(\frac{9}{10}q\right)^n-1}{\left(\frac{9q}{10}\right)-1}.$$

A keresett határérték ennek alapján

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{1-\frac{9q}{10}}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10-9q},\qquad \text{mert}\qquad \frac{9q}{10}<1.$$

*Kiss Emil* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)