A feladat feltétele megfogalmazható a következőképpen is: az összes csúcsot páronként összekötő szakaszok közül az egyforma hosszúságúak fele azonos, a másik fele különböző színű csúcsokat köt össze.

a) Ha p, ill. k csúcsot festünk meg pirossal, ill. kékkel $(p+k=n)$, akkor a piros, a kék és a különböző színű csúcspárokat összekötő szakaszok száma rendre $\binom{p}{2}$, $\binom{k}{2}$ és pk. Speciálisan a szabályos n-szögünk csúcsait összekötő összes szakasz fele azonos, a másik fele különböző színű csúcsokat köt össze, tehát

$$\binom{p}{2}+\binom{k}{2}=pk,$$

vagyis

$$p(p-1)+k(k-1)=2pk,$$

azaz

$$(p-k)^2=p+k=n, \tag{1}$$

ezért n valóban csak négyzetszám lehet.

b) Tegyük fel, hogy $n=16$ esetén létezik legalább egy, a feladat feltételeit kielégítő színezés. Mivel a piros és a kék szín szerepe felcserélhető, azért elég a $p\geqq k$ esetet vizsgálnunk. Ekkor $p+k=16$ és (1) alapján $p-k=4$, tehát $p=10$, $k=6$. A továbbiakban megnézzük, hogyan kell a 6 kékre festett csúcsnak elhelyezkednie.

Válasszuk a szabályos 16-szögünk köré írt k kör kerületét 16 egységnyinek és értelmezzük két csúcs „távolságát" az őket összekötő két körív közül a rövidebbiknek (a nem hosszabbiknak) a hosszával. Az összes csúcs között 16, ill. 8 db s hosszúságú távolság lép fel aszerint, hogy $s\neq 8$, ill. $s=8$.

Ha $s\neq 8$, akkor a 16 db s hosszúságú távolság végpontjai között a 16-szög mindegyik csúcsa pontosan kétszer szerepel, és a feladat feltevése szerint 8 távolságnak az egyik végpontja kék, a másik piros. Így ha a 6 kék csúcs közül e_s-féleképpen lehet két csúcsot úgy kiválasztani, hogy azok egymástól s távolságra legyenek, akkor $2e_s+8$ a kék csúcsok számának kétszeresét adja, tehát $2e_s+8==12$, azaz $e_s=2$ $(s\neq 8)$.

Ha pedig $s=8$, akkor – mivel a nyolc db 8 egységnyi hosszúságú távolság végpontjai között a 16 szög minden csúcsa pontosan egyszer lép fel –, hasonlóan $2e_8+4=6$, azaz $e_8=1$.

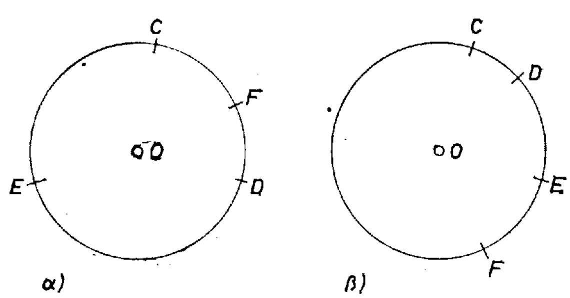
A talált $e_s=2$ $(1\leqq s\leqq 7)$ és $e_8=1$ eredmények szükséges feltételei egy megfelelő színezésnek.

Jelölje az egymástól 8 egységnyi távolságra levő két kék csúcsot A és B, a további kék csúcsokat pedig C, D, E, F. A hat kék csúcs közötti 15 távolság összege az elmondottak alapján $2(1+2+\ldots+7)+8=64$. Mivel bármely X további csúcsra $\widehat{AX}+\widehat{XB}=8$ (ahol $\widehat{AX}$ az A és X csúcsok távolságát jelenti), azért a C, D, E és F csúcsok között fellépő 6 távolság összege $64-4\cdot 8-\widehat{AB}=24$. E csúcsok elhelyezkedésre két eset lehetséges.

α) Ha a $CDEF$ négyszög tartalmazza a k kör O középpontját, akkor található a négyszög csúcsai között három olyan, mondjuk C, D és E, hogy a CDE háromszög tartalmazza O-t. Legyen F pl. a C és D között. Mivel az F-et és az E-t összekötő rövidebbik körív tartalmazza vagy a C-t vagy a D-t, ezért $\widehat{FE}$ nagyobb a $\widehat{CE}$ és $\widehat{DE}$ valamelyikénél, mondjuk $\widehat{FE}>\widehat{DE}$. A C, D és E csúcsok közötti három távolság összege 16, így

$$8=24-16=\widehat{FC}+\widehat{FD}+\widehat{FE}=\widehat{CD}+\widehat{FE}>\widehat{CD}+\widehat{DE}=\widehat{16}-EC,$$

azaz $EC>8$, ami ellentétben áll feltevésünkkel.



β) Ha nem az *α)* eset teljesül, akkor található olyan félkörív, hogy mind a négy csúcs ezen helyezkedik el. Legyen a négy csúcs között fellépő legnagyobb távolság $\widehat{CF}$, és legyen D közelebb a C-hez, mint az F-hez. Ekkor

$$\widehat{CD}+\widehat{DF}=\widehat{CE}+\widehat{EF}=\widehat{CF},$$

s így a négy csúcs közötti 6 távolság összege

$$24=3\widehat{CF}+\widehat{DE},$$

tehát DE osztható 3-mal, azaz $\widehat{DE}=3$ és $\widehat{SF}=7$ (hiszen $\widehat{DE}\leqq\widehat{CF}-2<6$).

Ha mármost $\widehat{CD} = 1$ vagy $\widehat{CD} = 3$, akkor a hat távolság 1, 3, 3, 4, 6 és 7.

Hozzávéve C, D, E és F-hez a szemben fekvő A, B csúcspárt, a talált feltétel szerint e hat távolsághoz hozzá kell lépnie két db 5 egységnyinek is, de akkor a mondottak szerint két db (8-ra kiegészítő) 3 egységnyinek is. Így pedig a hat kék csúcs közti távolságok közt a 3 négyszer lép föl, amit a feltétel nem enged meg.

Ha végül $\widehat{CD} = 2$, akkor a hat távolság 2, 3, 2, 5, 5, 7, és fel kell lépnie egy további 3-asnak, de vele egy további 5-ösnek is, tehát ez sem lehetséges.

Mindezek szerint nem lehet egy szabályos 16-szög csúcsait megfesteni a követelmények szerint.