Hagyjunk el egyet az $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ számok közül és vegyünk ki minden lehetséges módon a maradó $2n$ szám közül n-et, majd osszuk el ezek szorzatát az n kimaradó szorzatával. Jelölje az elhagyott számot x_k és a kapott $\binom{2n}{n}$ darab szám összegét A_k, ekkor a feladatban szereplő új számok S összegének $(n+1)$-szeresére

$$(n+1)S = x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_{2n+1}A_{2n+1},$$

aminek igazolására elég azt megjegyeznünk, hogy ez a kifejezés az $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ változókban szimmetrikus és pl. az $\dfrac{x_1x_2 \ldots x_{n+1}}{x_{n+2}x_{n+3} \ldots x_{2n+1}}$ számunk csak az $x_1A_1, x_2A_2, \ldots, x_{n+1}A_{n+1}$ tagokban fordul elő, és minden ilyen tagban pontosan egyszer.

Mivel $2n$ szám közül n-et kiválasztva a maradók száma is n, azért az A_k-ban szereplő bármely tört reciproka is előfordul A_k-ban, vagyis az A_k összeg $\dfrac{1}{2}\dbinom{2n}{n}$ számú olyan pár összege, amelyek mindegyikének tagjai egy tört és a reciproka. Tehát

$$A_k \geqq \binom{2n}{n}$$

hiszen ismeretes, hogy egy pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2. Mivel S tagjainak száma $\dbinom{2n+1}{n+1}$ azért (1) alapján számtani közepük

$$\frac{S}{\binom{2n+1}{n+1}} \geqq \frac{x_1\binom{2n}{n} + x_2\binom{2n}{n} + \ldots + x_{2n+1}\binom{2n}{n}}{(n+1)\binom{2n+1}{n+1}} = \\ = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n+1}}{2n+1},$$

amint a feladat állítja, hiszen

$$\binom{2n+1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Megjegyzések. 1. A megoldásból egyszerűen kiolvasható, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+1}$.

2. Megmutatható, hogy az egyenlőtlenség fennáll akkor is, ha az eredeti számok szorzata pozitív.