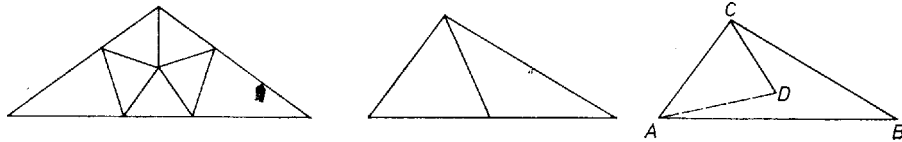


Ha egy szabályos ötszög valamelyik csúcsából kiinduló oldalait meghosszabbítjuk a szemközti oldal egyeneséig, olyan háromszöget kapunk, mint amilyen a feladatban szerepel. Ha összekötjük az ötszög csúcsait az ötszög centrumával, az eredeti háromszöget – vagy legalábbis egy hozzá hasonlót – hét hegyesszögű háromszögre daraboltuk fel. Megmutatjuk, hogy ennél kevesebb hegyesszögű háromszögre nem lehet az eredeti háromszöget feldarabolni, sőt ezen túlmenően azt is megmutatjuk, hogy egyáltalán nincs se a derékszögű, se a tompaszögű háromszögek között olyan, amelyiket hétnél kevesebb hegyesszögű háromszögre lehetne feldarabolni. Ezt úgy fogjuk belátni, hogy feltesszük az ellenkezőjét, és ebből ellentmondásra jutunk.



Tegyük fel tehát, hogy van – esetleg vannak – hétnél kevesebb hegyesszögű háromszögre bontható derék- vagy tompaszögű háromszögek. Vegyünk ezek közül ki egy olyat, amelyet a lehető legkevesebb részre lehet bontani, és tekintsük a minimális kibontását. E minimális felbontásban indul ki a derék-vagy tompaszög csúcsából él, ez azonban nem mehet el a szemközti oldalig. Ellenkező esetben ugyanis két háromszögre vágná az eredeti háromszöget, melyek közül legalább az egyik nem volna hegyesszögű, és legalább eggyel kevesebb hegyesszögű háromszögre lenne felbontva mint az eredeti. Tehát az eredeti felbontás nem volna minimális.

A derék- vagy tompaszög csúcsából kiinduló szakasz ezek szerint csak belső pontban végződhet. Ehhez a ponthoz legalább öt háromszög csatlakozik a felbontásban, különben nem lehetne mind hegyesszögű. Rajtuk kívül már csak egy háromszög keletkezhet a felbontásból. Jelöljük a háromszög hegyes szögeinek a csúcsait  $A$ -val,  $B$ -vel, a harmadik csúcsot  $C$ -vel, a már említett belső pontot  $D$ -vel. Mivel az  $ADB$ ,  $BDC$ ,  $CDA$  szögek nem mind hegyesszögűek, az  $AD$ ,  $BD$  élek nem szerepelhetnek egyszerre a felbontásban (különben ismét azt kapnánk, hogy az eredeti felbontás nem volt minimális). Mondjuk a  $BD$  él nem szerepel a felbontásban, akkor a felbontás  $B$ -t tartalmazó hegyesszögű háromszögének  $D$  nem lehet csúcsa. Ennek a háromszögnek nyilván  $A$  sem lehet csúcsa, tehát az  $A$ -hoz csatlakozó háromszögnek  $D$  csúcsa.

A  $D$ -ből induló további élek végpontjai csak eddig még nem említett pontok lehetnek, tehát a felbontásban még legalább 3 további csúcs keletkezik. Ezek között nem lehet újabb belső pont, különben ahhoz is öt háromszög csatlakozna, amelyek közül legfeljebb csak kettő csatlakozhatna  $D$ -hez, együtt tehát legalább  $2 \cdot 5 - 2 = 8$  háromszögünk volna.

Tehát a  $D$ -ből induló további élek végpontjai az  $ABC$  háromszög oldalain vannak. Ha köztük van az  $AC$  szakaszon levő, a hozzá vezető él az  $ADC$  háromszöget olyan részre vágná, amelyek közül az egyik választható volna  $ABC$  helyére, tehát  $ABC$  nem volna minimális. Ha nincs e pontok közt  $AC$ -n levő, akkor  $AB$ -n vagy  $BC$ -n van közöttük kettő: jelöljük ezek közül a  $B$ -hez közelebbit  $P$ -vel, a másikat  $Q$ -val. Ekkor az  $ADP$  (vagy ha  $PQ$ ,  $BC$ -n van, a  $CDP$ ) háromszöget vágja ketté  $DQ$  két olyan részre, amelyek közül az egyik létezése ellentmond  $ABC$  minimális tulajdonságának. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.